Universidade do Algarve

Faculdade de Ciências e Tecnologia

# Sobre o núcleo de operadores integrais singulares com deslocamento não Carlemaneano

(Tese para a obtenção do grau de Doutor em Matemática,

especialidade de Análise Matemática)

Rui Carlos de Maurício Marreiros

Orientador: Doutor Viktor Grigorievich Kravchenko, Professor Catedrático da Universidade do Algarve

Constituição do Júri:

Presidente: Reitor da Universidade do Algarve

Vogais:

Doutor António Ferreira dos Santos, Professor Catedrático do I. S. Técnico

Doutor Helmuth Robert Malonek, Professor Catedrático da U. Aveiro

Doutor Viktor Grigorievich Kravchenko, Professor Catedrático da U. Algarve

Doutor Stefan Grigorievich Samko, Professor Catedrático da U. Algarve

Doutor Amarino Brites Lebre, Professor Associado do I. S. Técnico

Doutor Nenad Manojlovich, Professor Associado da U. Algarve

Faro, 2006

## 0.1 Resumo e palavras-chave

**Nome:** Rui Carlos de Maurício Marreiros.

**Orientador:** Viktor Grigorievich Kravchenko, Professor Catedrático.

**Título:** Sobre o núcleo de operadores integrais singulares com deslocamento não Carlemaneano.

**Resumo:** Vamos considerar o operador $T = I - cUP_+ \colon L_2^n(\mathbb{T}) \to L_2^n(\mathbb{T})$, na circunferência unitária $\mathbb{T}$, com um deslocamento não Carlemaneano $\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ que tem um conjunto finito de pontos fixos, e onde $I$ é o operador de identidade, $c \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ é uma função matricial contínua, $(U\varphi)(t) = \sqrt{|\alpha'(t)|}\varphi(\alpha(t))$ é o operador de deslocamento isométrico e $P_\pm = \dfrac{1}{2}(I \pm S)$ são os operadores de projecção complementares, com $(S\varphi)(t) = (\pi i)^{-1}\int_{\mathbb{T}} \varphi(\tau)(\tau - t)^{-1}d\tau$ o operador de integração singular com núcleo de Cauchy. É suposto que todos os valores próprios da matriz $c(t)$ nos pontos fixos do deslocamento se encontram simultaneamente no interior de $\mathbb{T}$, ou no exterior de $\mathbb{T}$. Nestas condições, e relacionadas, são obtidas estimativas para a dimensão do núcleo do operador $T$, definido na circunferência unitária ou na recta real compactificada a um ponto. Obtemos estimativas análogas, em condições similares, para um operador com coeficiente polinomial relativamente ao operador de deslocamento; para isso consideramos um operador matricial associado com os mesmos parâmetros de Fredholm. Serão considerados casos particulares e exemplos, mostrando que as estimativas propostas são óptimas. Como aplicação dos resultados obtidos, analisa-se um problema de contorno de Riemann generalizado com deslocamento.

**Palavras-chave:** Operadores integrais singulares, operadores de deslocamento, dimensão do núcleo.

## 0.2 Abstract and keywords

**Name:** Rui Carlos de Maurício Marreiros.

**Supervisor:** Viktor Grigorievich Kravchenko, Full Professor.

**Title:** On the kernel of singular integral operators with non-Carleman shift.

**Abstract:** We will consider the operator $T = I - cUP_+$: $L_2^n(\mathbb{T}) \to L_2^n(\mathbb{T})$, on the unit circle $\mathbb{T}$, with a non-Carleman shift $\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ which has a finite set of fixed points, and where $I$ is the identity operator, $c \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ is a continuous matrix function, $(U\varphi)(t) = \sqrt{|\alpha'(t)|}\varphi(\alpha(t))$ is the isometric shift operator and $P_\pm = \dfrac{1}{2}(I \pm S)$ are the complementary projection operators, with $(S\varphi)(t) = (\pi i)^{-1}\int_{\mathbb{T}}\varphi(\tau)(\tau - t)^{-1}d\tau$ the operator of singular integration with Cauchy kernel. It is supposed that all the eigenvalues of the matrix $c(t)$ at the fixed points of the shift, simultaneously belong either to the interior of the unit circle $\mathbb{T}$ or to its exterior. Under these and related conditions, estimates for the dimension of the kernel of the operator $T$, defined on the unit circle or on the one point compactification of the real line, are obtained. We obtain analogous estimates, under similar conditions, for an operator with polynomial coefficient relative to the shift operator; to get it, we consider an associated matrix operator with the same Fredholm parameters. Particular cases and examples will be considered, which show that the proposed estimates are sharp. As an application of the obtained results, a generalized Riemann boundary value problem with shift is analyzed.

**Keywords:** Singular integral operators, shift operators, kernel dimension.

## 0.3 Prefácio

O tema deste trabalho inclui-se na área dos operadores integrais singulares com deslocamento (OISD), mais concretamente na teoria da solubilidade destes.

É estudado o operador $T = I - cUP_+ \colon\ L_2^n(\Gamma) \to L_2^n(\Gamma)$, na circunferência unitária e na recta real compactificada a um ponto, $\Gamma = \mathbb{T}, \overset{\circ}{\mathbb{R}}$, com um deslocamento não Carlemaneano $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ que tem um conjunto finito de pontos fixos, e onde $I$ é o operador de identidade, $c \in C^{n\times n}(\Gamma)$ é uma função matricial contínua, $(U\varphi)(t) = \sqrt{|\alpha'(t)|}\varphi(\alpha(t))$ é o operador de deslocamento isométrico e $P_\pm = \dfrac{1}{2}(I \pm S)$ são os operadores de projecção complementares, com $(S\varphi)(t) = (\pi i)^{-1}\int_\Gamma \varphi(\tau)(\tau - t)^{-1}d\tau$ o operador de integração singular com núcleo de Cauchy.

Os operadores integrais são profusamente utilizados nos diferentes ramos das ciências, engenharia e tecnologia. Mais concretamente, entre outras, encontram-se aplicações de OISD, problemas de contorno com deslocamento, equações integrais singulares com deslocamento, na mecânica e geometria: mecânica dos meios contínuos, teoria da elasticidade, teoria da rigidez (ver, por exemplo [42] e [43]). Em particular, sejam $\Gamma$ uma curva de Lyapunov fechada, fronteira de uma região limitada simplesmente conexa $G_+$, no plano complexo $\mathbb{C}$, $G_-$ a região simplesmente conexa $\mathbb{C}\diagdown(G_+ \cup \Gamma)$, e $a, b \in H_\mu(\Gamma)$. O problema de contorno com deslocamento que consiste em determinar as funções $\varphi_+(z)$ e $\varphi_-(z)$, analíticas em $G_+$ e $G_-$, contínuas em $G_+ \cup \Gamma$ e $G_- \cup \Gamma$, respectivamente, que satisfazem a condição imposta nos seus pontos fronteira, i. e., em $\Gamma$, $\varphi_+(\alpha(t)) = a(t)\varphi_-(t) + b(t)\overline{\varphi_-(t)}$, com $\varphi_-(z) = O(|z|^{-4})$ no infinito, está ligado com o problema da rigidez de uma superfície fechada formada por duas partes coladas, (ver o livro de I. Vekua [42], p. 363-366). Outro exemplo é o de um problema da teoria da elasticidade para corpos anisotrópicos que é redutível a um problema de contorno com deslocamento análogo ao mencionado acima (ver o livro de N. Vekua [43], p. 361-371). Na última secção deste trabalho um problema de contorno deste tipo é analisado.

Notamos que também na área de Análise de Sinal, os operadores $U$ e $S$ são frequentemente usados; a variável $t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}$ é interpretada como sendo o tempo ou a frequência, conforme o contexto (ver, por exemplo, o clássico [3] e o recente livro [1], entre a vasta bibliografia disponível). O operador de integração singular $S$ na recta real, também designado por transformada de Hilbert, é utilizado, por exemplo, para a construção de sinais analíticos e na denominada Modulação de Banda Unilateral (ver, por exemplo, [14], [16], [37] e [1]). Esta pode ser descrita, como um caso particular, pelo operador $T = I - cUP_+$ em $L_2(\mathbb{R})$, aqui estudado. Aplicando a transformada de Fourier à equação integral singular no "espaço do tempo" $(I - cUP_+)f = g$, onde $(U\varphi)(t) = \varphi(t+h)$, $h \in \mathbb{R}$, obtemos a correspondente equação no "espaço da frequência" (ou vice-versa): $\widehat{f}(t) + \int_{\mathbb{R}^+} \widehat{c}(t-\tau)e^{ih\tau}\widehat{f}(\tau)d\tau = \widehat{g}(t)$, onde $\widehat{c}$, $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$ são as transformadas de Fourier das funções $c$, $f$ e $g$, respectivamente. A Modulação de um sinal físico real no emissor pressupõe a possibilidade de Demodulação no receptor, ou seja, o operador responsável pela Modulação deve ser invertível. Estas são questões da teoria da solubilidade dos OISD, onde este trabalho se insere.

A história das equações integrais singulares e dos problemas de contorno para funções analíticas começa com B. Riemann (1857) quando formula o problema de contorno designado na literatura por problema de Riemann, problema de Riemann-Hilbert, problema de Hilbert ou problema da conjugação de funções analíticas. A investigação deste problema é iniciada por D. Hilbert (1904) que estabelece a sua relação com uma equação integral de Fredholm. Em investigações análogas, C. Haseman (1907) introduz um deslocamento no argumento de um dos valores fronteira da função analítica procurada: pela primeira vez é considerado um problema de contorno com deslocamento para funções analíticas. T. Carleman (1932) também estudou um problema deste tipo com o deslocamento designado posteriormente com o seu nome (i. e., um deslocamento $\alpha$ para o qual $\exists n \in \mathbb{N} : \alpha_n(t) \equiv t$, onde $\alpha_k = \alpha(\alpha_{k-1}(t))$, $k \in \mathbb{N}$, e $\alpha_0(t) \equiv t$).

A teoria clássica das equações integrais singulares e de problemas de contorno para funções analíticas, em cuja origem se encontram os nomes de D. Hilbert e H. Poincaré, foi estabelecida essencialmente por matemáticos soviéticos no início dos anos quarenta. Podemos conhecê-la nos livros [38] e [10] de dois dos seus mais activos fundadores, N. Muskhelishvili e F. Gakhov. Nestas também se mostra a sua aplicação à resolução de problemas da Física-Matemática (teoria da elasticidade). O sucesso desta teoria estimulou o estudo de equações integrais singulares com deslocamento e de problemas de contorno com deslocamento para funções analíticas. Para o seu desenvolvimento foram pioneiros os trabalhos de D. Kveselava e N. Vekua no fim dos anos quarenta. Em particular são seus os primeiros resultados da teoria da solubilidade ao estudarem certos tipos de operadores cujas condições de solubilidade não dependiam do deslocamento considerado. Foi num trabalho de N. Vekua (1948) que pela primeira vez foi considerada uma equação integral singular com deslocamento e, além disso, não necessariamente de

Carleman. Nos vinte anos seguintes, foi construída a teoria de Fredholm para os operadores integrais singulares com deslocamento de Carleman e começou a desenvolver-se a teoria para os operadores integrais singulares com deslocamento não Carlemaneano (i. e., um deslocamento $\alpha$ para o qual $\nexists n \in \mathbb{N} : \alpha_n(t) \equiv t$).

A teoria de Fredholm (critério para a propriedade de Fredholm do operador, cálculo do índice do operador) para os operadores integrais singulares com deslocamento de Carleman foi essencialmente construída por G. Litvinchuk nos anos sessenta e setenta. Os seus e os resultados acumulados de matemáticos como D. Kveselava, N. Vekua, I. Gohberg, M. Krein, N. Krupnik, N. Karapetiants, S. Samko, V. Kravchenko, Iu. Karlovich, entre outros, foram sumarizados no seu livro [33].

Os anos setenta e oitenta foram um período de intenso desenvolvimento da teoria dos OISD; em particular foi construída a teoria de Fredholm para os operadores integrais singulares com deslocamento não Carlemaneano, com um conjunto não vazio de pontos fixos, fruto essencialmente dos trabalhos de V. Kravchenko e de Iu. Karlovich. Os resultados alcançados levaram V. Kravchenko e G. Litvinchuk a publicar o livro [25], dedicado à descrição sistemática da teoria de Fredholm dos OISD. Entretanto os progressos na teoria da solubilidade (cálculo dos números de defeito do operador, determinação de bases nos subespaços do núcleo e conúcleo do operador, problemas espectrais) embora mais vagarosamente, também tinham lugar: a teoria da solubilidade de operadores integrais singulares com deslocamento linear fraccionário de Carleman (G. Drekova e V. Kravchenko, 1990 [7]; V. Kravchenko e A. Shaev, 1991 [29]), a teoria da solubilidade para uma classe de equações integrais singulares com deslocamento não Carlemaneano (A. Baturev, V. Kravchenko e G. Litvinchuk, 1996 [2]), o problema do espectro de um operador integral singular com deslocamento linear fraccionário de Carleman (V. Kravchenko, A. Lebre e G. Litvinchuk, 1998 [20]) (ver também [9], [21], [22], [23] e [24]). Reunindo os desenvolvimentos da teoria, em 2000 G. Litvinchuk publicou o livro [34] dedicado à descrição sistemática da teoria da solubilidade dos OISD, dos problemas de contorno com deslocamento e equações integrais singulares com deslocamento. O último capítulo deste livro é, na essência, o artigo citado [2], e sobre ele escreve o seu autor na introdução (ver [34], p. XVI): “At last, Chapter 9 is devoted to a quite new and very difficult question related to the solvability theory of polynomial singular operator of type $(aI + bW)P_+ + (cI + dW)P_-$ on $L_p(\Gamma), 1 < p < \infty$, but with a non-Carleman shift. This Chapter is written in the hope of giving a stimulus to further investigations in this direction, prompting applications to problems of matematical physics”.

O artigo [2] é o ponto de partida do presente trabalho. Este está estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 são introduzidas as notações, definições e propriedades que venham a ser directamente usadas nos capítulos seguintes (secções 1.1 a 1.5). Na secção 1.6 é lembrado o resultado de [2] que iremos generalizar: uma estimativa para a dimensão do núcleo do operador $(I - cU)P_+ + P_-$ em $L_2(\mathbb{T})$.

Os Capítulos 2 e 3 são constituídos por resultados originais.

No Capítulo 2 iremos considerar o operador $T = (I - cU)P_+ + P_-$ em $L_2^n(\mathbb{T})$; obteremos estimativas para a dimensão do núcleo deste operador nas diferentes condições suficientes explícitas da propriedade de Fredholm para o operador $T$:

1. Com coeficiente matricial cujo raio espectral nos pontos fixos do deslocamento é menor que um; com um deslocamento geral (secção 2.1).

2. Com coeficiente matricial cujo raio espectral nos pontos fixos do deslocamento é maior que um; neste caso e seguintes será considerado um deslocamento linear fraccionário (secção 2.2).

3. Com coeficiente matricial diagonal (2.2.3), e,

4. Com coeficiente matricial triangular (2.2.4).

Um operador com coeficiente matricial do tipo de permutação é analisado na secção 2.3. Na secção 2.4 transferimos os resultados obtidos para a recta real. Na secção 2.5 obteremos estimativas para a dimensão do núcleo de um operador que contém o operador de deslocamento e potências deste.

No Capítulo 3 serão considerados alguns casos particulares e exemplos, mostrando que as estimativas propostas são óptimas (secções 3.1 a 3.3). Como já referimos, na secção 3.4 analisa-se um problema de contorno de Riemann generalizado com deslocamento.

Os resultados das secções 2.1 e 2.2 foram apresentados na "International Conference on Factorization, Singular Operators and Related Problems" FSORP-2002 (Funchal, Portugal) e publicados no artigo [26]. Os resultados das secções 2.4 e 2.5 foram apresentados no "6th Annual Workshop on Applications and Generalizations of Complex Analysis" - 2003 (Aveiro, Portugal); estes, complementados, e os resultados das secções 3.1 a 3.3 foram apresentados no "International Workshop on Operator Theory and Applications" IWOTA-2004 (Newcastle upon Tyne, UK) e aceites para publicação na forma do artigo [27]. Os resultados da secção 3.4 foram apresentados na "Conference on Operator Theory, Function Spaces and Applications" OTFUSA-2005 (Aveiro, Portugal) e, complementados, na "Conference on Differential and Difference Equations and Applications" - 2005 (Melbourne, USA) e aceites para publicação na forma do artigo [28].

Agradeço:

Ao Professor Viktor Kravchenko, cujo saber e rigor, disponibilidade e apoio permanentes tornaram possível este trabalho.

Aos Professores Juan Rodriguez e Ana Conceição, que comigo, e sob a orientação do Professor Viktor Kravchenko, constituem o núcleo do "seminário de trabalho" regular que decorre no Departamento de Matemática da Universidade do Algarve. Todos os resultados deste trabalho foram ali previamente discutidos, revistos e referendados.

Ao Professor Stefan Samko, a revisão informal do artigo [26].

Aos Professores José Mourão e Marco Mackaay, a revisão informal do artigo [27].

Aos Professores com quem tive o privilégio de aprender.

À Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do Centro de Matemática e Aplicações, do Instituto Superior Técnico, o apoio financeiro à participação em conferências no âmbito deste trabalho.

À Fátima, Pedro, Joana e António, por tudo.

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Conceitos básicos da teoria dos operadores integrais singulares com deslocamento

Este Capítulo tem carácter auxiliar: são introduzidas as notações, definições e propriedades, relacionadas com os objectos matemáticos que dão nome às respectivas secções, e que venham a ser directamente usadas nos capítulos seguintes. Regra geral omitimos as demonstrações; estas podem ser encontradas, em [13] (secção 1.1 e 1.2), [35] (secção 1.3), [25] (secções 1.4 e 1.5) e [2] (secção 1.6). No contexto da exposição serão propostas referências bibliográficas adicionais.

## 1.1 Espaços

Uma curva orientada simples $\Gamma$ (fechada ou aberta) chama-se curva de Lyapunov se existe a tangente a $\Gamma$ em todo o ponto $t \in \Gamma$ e forma com o eixo real um ângulo $\theta(t)$ que satisfaz a condição de Hölder

$$|\theta(t_1) - \theta(t_2)| < A\, |t_1 - t_2|^{\mu}\,, \quad A > 0, \quad 0 \leq \mu < 1.$$

Uma curva de Lyapunov fechada $\Gamma$ é a fronteira de uma região limitada simplesmente conexa $G_+$, no plano complexo $\mathbb{C}$. Por $G_-$ é designada a região simplesmente conexa $\mathbb{C} \setminus (G_+ \cup \Gamma)$. É assumido que a orientação positiva da curva $\Gamma$ é que deixa a região $G_+$ à esquerda quando $\Gamma$ é percorrida no sentido antihorário.

Lembramos que:

1. O espaço de Hilbert $L_2(\Gamma)$ é o espaço de todas as funções $\varphi$ mensuráveis à Lebesgue na curva $\Gamma$, tais que $|\varphi(t)|^2$ são integráveis, e com a norma

$$\|\varphi\|_{L_2} = \left( \int_\Gamma |\varphi(t)|^2\, |dt| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. O espaço de Banach $L_\infty(\Gamma)$ é o espaço de todas as funções $\varphi$ limitadas e analíticas em $\Gamma$ com a norma

$$\|\varphi\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{t\in\Gamma} |\varphi(t)|\,.$$

3. O espaço de Banach $C(\Gamma)$ é o espaço de todas as funções $\varphi$ contínuas em $\Gamma$ com a norma

$$\|\varphi\|_C = \max_{t\in\Gamma} |\varphi(t)|\,.$$

4. O espaço de Banach $H_\mu(\Gamma)$ é o espaço de todas as funções $\varphi$ definidas na curva $\Gamma$, que satisfazem a condição de Hölder com expoente $\mu$, e com a

norma
$$\|\varphi\|_{H_\mu} = \max_{t\in\Gamma} |\varphi(t)| + \sup_{\tau,t\in\Gamma} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t)|}{|\tau-t|^\mu}.$$

Os operadores considerados neste trabalho são definidos no espaço de Hilbert $L_2^n(\Gamma)$. Este espaço consiste nos vectores de dimensão $n$, com componentes $u_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ pertencendo ao espaço $L_2(\Gamma)$. Naquele espaço a norma é definida por
$$\|u\|_{L_2^n} = \max_{1\le k\le n} \|u_k\|_{L_2}.$$

No contexto deste trabalho, $\Gamma$ designará sempre uma curva de Lyapunov fechada. Em particular, serão consideradas a circunferência unitária e a recta real compactificada a um ponto; assim lembramos as notações habituais:

1. $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ é a circunferência unitária; $\mathbb{T}_+(\mathbb{T}_-)$ designa o interior (exterior, respectivamente) do círculo unitário.

2. $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é a recta real compactificada a um ponto; $\mathbb{C}_+(\mathbb{C}_-)$ designa o semi-plano superior (inferior, respectivamente):
$\mathbb{C}_+(\mathbb{C}_-) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 (< 0)\}$.

## 1.2 O operador de integração singular

Vamos definir os operadores que irão estar presentes em todo este trabalho. Comecemos pelo operador de integração singular com núcleo de Cauchy
$$(S\varphi)(t) = (\pi i)^{-1} \int_\Gamma \varphi(\tau)(\tau - t)^{-1} d\tau, \quad \tau \in \Gamma, \tag{1.1}$$
onde o integral é entendido no sentido do valor principal de Cauchy. A função $\varphi(t)$ chama-se a densidade do integral singular e pertence ao espaço $L_2(\Gamma)$. O operador de integração singular, $S : L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$, satisfaz as propriedades:

1. O operador $S$ é limitado no espaço $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \mathbb{T}, \overset{\circ}{\mathbb{R}}$ (ver, por exemplo, [13], [32], [8] e [29]; ver também o Capítulo 6, Vol. I, em [39]).

2. O operador $S$ é involutivo, i. e.,

$$S^2 = I,$$

onde $I$ é o operador identidade.

3. O operador $S - S^*$ é compacto em $L_2(\Gamma)$ (ver [25], p. 25). O operador $S$ é autoadjunto, i. e., $S = S^*$, para $\Gamma = \mathbb{T}, \overset{\circ}{\mathbb{R}}$.

Das propriedades 1 e 2 mencionadas decorre que os operadores

$$P_+ = \frac{1}{2}(I + S), \quad P_- = \frac{1}{2}(I - S), \tag{1.2}$$

são operadores de projecção complementares e ortogonais em $L_2(\Gamma)$. A condição $(P_-\varphi)(t) = 0$ é necessária e suficiente para que uma dada função $\varphi \in L_2(\Gamma)$ seja o valor limite de uma função analítica em $G_+$, que é representada por um integral do tipo de Cauchy com densidade no espaço $L_2(\Gamma)$. A condição $(P_+\varphi)(t) = 0$ é necessária e suficiente para que uma dada função $\varphi \in L_2(\Gamma)$ seja o valor limite de uma função analítica em $G_-$, nula no ponto infinito, e representada por um integral do tipo de Cauchy com densidade no espaço $L_2(\Gamma)$. Os operadores $P_\pm$ permitem representar o espaço $L_2(\Gamma)$ como a soma directa

$$L_2(\Gamma) = L_2^+(\Gamma) \oplus \overset{\circ}{L_2^-}(\Gamma),$$

onde $L_2^+(\Gamma) = P_+L_2(\Gamma)$ e $\overset{\circ}{L_2^-}(\Gamma) = P_-L_2(\Gamma)$; designa-se ainda o espaço $L_2^-(\Gamma) = P_-L_2(\Gamma) \oplus \mathbb{C}$ [1].

[1] Ver informação detalhada sobre os operadores $S$, $P_\pm$, integrais do tipo de Cauchy e as chamadas fórmulas de Sokhostsky-Plemeli, em [10], [38] e [13].

Por abuso de notação, escreveremos simplesmente $K : L_2^n(\mathbb{T}) \to L_2^n(\mathbb{T})$ querendo nos referir ao operador $KE_m : L_2^n(\mathbb{T}) \to L_2^n(\mathbb{T})$, onde $E_m$ é a matriz identidade.

## 1.3 Factorização de funções matriciais contínuas

No que se segue o índice de Cauchy de uma função contínua $f \in C(\Gamma)$ ao longo da linha $\Gamma$ (ver, por exemplo, [10]), para $\Gamma = \mathbb{T}, \mathring{\mathbb{R}}$, será designado por $\operatorname{ind} f$, i.e.,

$$\operatorname{ind} f = \frac{1}{2\pi}\{\arg f(t)\}_{t\in\Gamma}.$$

Na circunferência unitária, suponhamos que a matriz $c \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ satisfaz a condição

$$\det c(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Então a função matricial contínua $c$ pode ser representada da seguinte maneira, designada por factorização de $c$ em $L_2^{n\times n}(\mathbb{T})$ (ver, por exemplo, [4], p. 165-166; ver também [35]),

$$c = c_-\Lambda c_+, \tag{1.3}$$

onde

$$c_-^{\pm 1} \in \left[L_2^-(\mathbb{T})\right]^{n\times n}, \quad c_+^{\pm 1} \in \left[L_2^+(\mathbb{T})\right]^{n\times n}, \quad \Lambda = \operatorname{diag}\{t^{\varkappa_j}\},$$

$\varkappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,n}$, são os índices parciais da factorização com $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq ... \geq \varkappa_n$.

Adicionalmente será assumido que

$$c_\pm^{\pm 1} \in C^{n\times n}(\mathbb{T}). \tag{1.4}$$

Suponhamos agora que na recta real compactificada a um ponto, a matriz $c \in C^{n\times n}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ satisfaz a condição

$$\det c(t) \neq 0, \quad \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}} \,.$$

Neste caso a função matricial contínua $c$ admite a factorização em $L_2^{n\times n}(\mathbb{R})$ (ver, por exemplo, [32]; ver também [8])

$$c = c_- \Lambda c_+, \tag{1.5}$$

onde

$$(t-i)^{-1} c_-^{\pm 1} \in \left[\widehat{L}_2^-(\mathbb{R})\right]^{n\times n}, \quad (t+i)^{-1} c_+^{\pm 1} \in \left[\widehat{L}_2^+(\mathbb{R})\right]^{n\times n},$$
$$\Lambda = \operatorname{diag}\left\{\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\varkappa_j}\right\},$$

$\varkappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,n}$, são os índices parciais da factorização com $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq ... \geq \varkappa_n$ e $\widehat{L}_2^\pm$ são os espaços das transformadas de Fourier das funções de $L_2^\pm$, respectivamente.

Também aqui assumiremos que

$$(t-i)^{-1} c_-^{\pm 1}, (t+i)^{-1} c_+^{\pm 1} \in C^{n\times n}(\mathbb{R}). \tag{1.6}$$

O número $\varkappa = \sum_{j=1}^n \varkappa_j$ chama-se o índice total, ou simplesmente, o índice da factorização; tem-se $\varkappa = \operatorname{ind} \det c$. No caso de $c \in C(\Gamma)$, o índice da factorização é $\varkappa = \operatorname{ind} c$.

## 1.4 Operadores de deslocamento

Sejam $\Gamma$ uma curva simples, fechada ou aberta, e $\alpha(t)$ uma transformação homeomórfica da curva $\Gamma$ nela própria. Um homeomorfismo $\alpha(t) : \Gamma \to \Gamma$

chama-se função de deslocamento ou simplesmente deslocamento. É assumido que o deslocamento $\alpha(t)$ tem derivada $\alpha'(t)$ que satisfaz a condição de Hölder para $\forall t \in \Gamma$ e $\alpha'(t) \neq 0$ também para $\forall t \in \Gamma$. Um deslocamento $\alpha(t) : \Gamma \rightarrow \Gamma$ pode ser classificado dependentemente de:

1. Preservar ou inverter a orientação na curva $\Gamma$.

2. Ter ou não ter pontos periódicos em $\Gamma$.

3. Se tem pontos periódicos, então, ou o conjunto destes coincide com $\Gamma$, ou estes formam um subconjunto fechado de $\Gamma$.

Designemos por $M(\alpha, k)$ o conjunto dos pontos periódicos do deslocamento $\alpha(t)$ com multiplicidade $k$. Um deslocamento $\alpha(t)$ tal que $M(\alpha, k) = \Gamma$, com $k \geq 2$, chama-se deslocamento de Carleman. Um deslocamento $\alpha(t)$ tal que $M(\alpha, k) \neq \Gamma$, chama-se deslocamento não Carlemaneano [2].

Definimos agora os seguintes operadores lineares, limitados e continuamente invertíveis em $L_2(\Gamma)$:

1. O operador de deslocamento $W$,

$$(W\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t)).$$

2. O operador de deslocamento isométrico $U$,

$$(U\varphi)(t) = |\alpha'(t)|^{\frac{1}{2}} \varphi(\alpha(t)). \tag{1.7}$$

O operador $US - SU$ é compacto em $L_2(\Gamma)$ (ver [25], p. 32 e 33). Em alguns casos particulares o operador de deslocamento e o operador de integração singular comutam, ou anticomutam, considerando um operador de

[2] Ver informação detalhada sobre os deslocamentos, a sua classificação e propriedades, em [25], [33] e [34].

deslocamento linear fracionário com um peso adequado (ver [34], p. 12) em vez do operador (1.7). Assim sendo, vamos considerar o deslocamento linear fraccionário não Carlemaneano que preserva a orientação na circunferência unitária $\mathbb{T}$, e que nos será útil mais adiante

$$\alpha(t) = \frac{at+b}{\overline{b}t+\overline{a}} : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \tag{1.8}$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$: $|a|^2 - |b|^2 = 1$; $\alpha(t)$ tem em $\mathbb{T}$ dois pontos fixos $\tau_1$ e $\tau_2$ dados pela fórmula

$$\tau_{1,2} = \frac{a - \overline{a} \pm \sqrt{(a+\overline{a})^2 - 4}}{2\overline{b}}.$$

Obviamente $\tau_1 \neq \tau_2$ se $|\operatorname{Re} a| \neq 1$.

O deslocamento $\alpha(t)$ admite a factorização

$$\alpha(t) = \alpha_+(t) t \alpha_-(t), \tag{1.9}$$

onde

$$\alpha_+(t) = \frac{1}{\overline{b}t+\overline{a}}, \quad \alpha_-(t) = \frac{at+b}{t}.$$

As funções $\alpha_+^{-1}$ e $\alpha_-$ são analíticas em $\mathbb{T}_+$ e $\mathbb{T}_-$, respectivamente. Da condição $|a|^2 - |b|^2 = 1$ tem-se $\left|\frac{a}{b}\right|^2 = 1 + \frac{1}{|b|^2} > 1$, de onde decorre que $\alpha_+$ e $\alpha_-^{-1}$ são analíticas em $\mathbb{T}_+$ e $\mathbb{T}_-$, respectivamente.

Para o deslocamento linear fraccionário $\alpha(t)$, é conveniente considerar o operador de deslocamento isométrico

$$(V\varphi)(t) = \alpha_+(t)\varphi(\alpha(t)), \tag{1.10}$$

em vez do operador $U$ definido por (1.7), pois o operador $V$ satisfaz a propriedade adicional $VS = SV$ e portanto $VP_\pm = P_\pm V$. De facto:

1. O operador $V$ é isométrico.

Temos

$$\|V\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{\overline{b}t + \overline{a}} \right|^2 |\varphi(\alpha(t))|^2 |dt| .$$

Por outro lado, usando a igualdade $|a|^2 - |b|^2 = 1$, temos

$$\alpha'(t) = \frac{1}{(\overline{b}t + \overline{a})^2} = \alpha_+^2(t) \Rightarrow |\alpha'(t)|^{\frac{1}{2}} = |\alpha_+(t)| .$$

Temos então

$$\|V\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{T}} |\alpha'(t)| \, |\varphi(\alpha(t))|^2 |dt| .$$

Fazendo $\alpha(t) = t_1 \Leftrightarrow \alpha'(t)dt = dt_1$, obtemos

$$\|V\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{T}} |\varphi(t_1)|^2 |dt_1| = \|\varphi\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|V\varphi\| = \|\varphi\| .$$

2. Os operadores $V$ e $S$ comutam.

Com efeito

$$(VS\varphi)(t) = (\pi i)^{-1}(\alpha_+(t)) \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau.$$

Fazendo $\tau = \alpha(t_1) \Leftrightarrow d\tau = \alpha'(t_1)dt_1$, obtemos

$$(VS\varphi)(t) = (\pi i)^{-1}(\alpha_+(t)) \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\alpha(t_1))\alpha'(t_1)}{\alpha(t_1) - \alpha(t)} dt_1.$$

Por outro lado

$$(SV\varphi)(t) = (\pi i)^{-1} \int_{\mathbb{T}} \frac{\alpha_+(t_1)\varphi(\alpha(t_1))}{t_1 - t} dt_1.$$

Facilmente constatamos que

$$\frac{\alpha_+(t)\alpha'(t_1)}{\alpha(t_1) - \alpha(t)} = \frac{\alpha_+(t_1)}{t_1 - t};$$

de onde decorre que $VS = SV$.

Vamos agora considerar o operador de deslocamento isométrico na recta real compactificada a um ponto $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$(U\varphi)(t) = \varphi(t+h), \quad h \in \mathbb{R}^+, \tag{1.11}$$

com o único ponto fixo no infinito.

1. O operador $U$ é isométrico.

2. Os operadores $U$ e $S$ comutam.

Com efeito

$$(US\varphi)(t) = (\pi i)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - (t+h)} d\tau.$$

Fazendo $\tau = t_1 + h \Leftrightarrow d\tau = dt_1$, obtemos

$$(US\varphi)(t) = (\pi i)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t_1+h)}{t_1 + h - (t+h)} dt_1 = (\pi i)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t_1+h)}{t_1 - t} dt_1.$$

Por outro lado

$$(SU\varphi)(t) = (\pi i)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t_1+h)}{t_1 - t} dt_1.$$

Constatamos que $US = SU$.

3. Ao operador de deslocamento $U$ definido por (1.11) em $\overset{\circ}{\mathbb{R}}$, corresponde um operador de deslocamento linear fraccionário que preserva a orientação na circunferência unitária $\mathbb{T}$ do tipo de $V$ definido por (1.10).

De facto, considere-se o operador linear limitado (ver, por exemplo, [13])

$$(B\varphi)(\xi) = \frac{1}{\xi - 1} \varphi\left(i \frac{\xi+1}{\xi-1}\right) : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{T}),$$

e o seu inverso

$$(B^{-1}\psi)(t) = \frac{2i}{t-i} \psi\left(\frac{t+i}{t-i}\right) : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{R}).$$

Determinemos o operador

$$BUB^{-1} : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T}).$$

Obtemos

$$(BUB^{-1}\varphi)(\xi) = \frac{1}{-\frac{i}{2}h\xi + 1 + \frac{i}{2}h}\varphi\left(\frac{\left(1-\frac{i}{2}h\right)\xi + \frac{i}{2}h}{-\frac{i}{2}h\xi + 1 + \frac{i}{2}h}\right),$$

i. e., o operador definido por (1.10) com $a = 1 - \frac{i}{2}h$ e $b = \frac{i}{2}h$.

## 1.5 Operadores emparelhados com deslocamento

Chamam-se operadores emparelhados com deslocamento em $L_2^n(\Gamma)$ aos operadores integrais singulares da forma

$$T(A_1, A_2) = A_1P_+ + A_2P_-,$$

onde

$$A_1 = a_1I + b_1U, \quad A_2 = a_2I + b_2U$$

e $a_1, a_2, b_1, b_2 \in C^{n\times n}(\Gamma)$. As condições para a propriedade de Fredholm e as fórmulas para o cálculo do índice do operador $T(A_1, A_2)$ são conhecidas (ver o Teorema 1, p. 148, e o Teorema 2, p. 149, em [25]). O critério de Fredholm para o operador $T(A_1, A_2)$ pode ser formulado da forma seguinte: o operador $T(A_1, A_2)$ é de Fredholm em $L_2^n(\Gamma)$ se e só se os operadores $A_1$ e $A_2$ forem continuamente invertíveis em $L_2^n(\Gamma)$.

O objecto principal deste trabalho é o operador emparelhado com deslocamento

$$T = I - cUP_+ : L_2^n(\mathbb{T}) \to L_2^n(\mathbb{T}) \tag{1.12}$$

na circunferência unitária $\mathbb{T}$, com um deslocamento não Carlemaneano $\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, que tem um conjunto finito de pontos fixos $\{\tau_1, ..., \tau_s\}, s \geq 1$; $I$ é o operador identidade, $c \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ é uma função matricial contínua, $U$ é o operador de deslocamento isométrico definido por (1.7) e $P_\pm$ são os operadores de projecção complementares com núcleo de Cauchy definidos por (1.2) (com $\Gamma = \mathbb{T}$).

No que se segue, $\sigma(g)$ é o espectro de uma matriz $g \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\rho(g)$ é o raio espectral de $g$.

O operador $T$ pode ser escrito na forma

$$T = (I - cU)P_+ + P_-.$$

Logo a questão sobre a propriedade de Fredholm do operator $T$ é equivalente à questão sobre a invertibilidade contínua do operador $I - cU$. Em geral as condições necessárias e suficientes de invertibilidade do operador $I - cU$ não podem ser expressas numa forma explícita (ver [25], p. 102, 103 e 118-142). Uma particulariedade destas condições expressa-se pela sua relação com uma classe especial de soluções da equação funcional homogénea, $\varphi(t) = c(t)\varphi(\alpha(t))$, associada ao operador $I - cU$. Uma vez que se pretendem condições de invertibilidade do operador $I - cU$, é claro, apriori, que estas soluções fundamentais, designadas por $\alpha$-soluções (ver a Definição 5, p. 137 em [25]), não pertencem ao espaço $L_2^n(\mathbb{T})$ em todo o contorno.

Em quatro casos particulares, as condições de invertibilidade para o operador $I - cU$ podem ser escritas numa forma explícita simples. Assim, o operador $I - cU$ é continuamente invertível se:

*Caso 1.* A matriz $c$ é tal que todos os seus valores próprios em todos os pontos fixos do deslocamento se encontram simultaneamente no interior da circunferência unitária $\mathbb{T}$, i. e., $\sigma[c(\tau_j)] \subset \mathbb{T}_+$, $j = \overline{1,s}$. (Ver o Teorema 1, p. 121, em [25]).

*Caso 2.* A matriz $c$ é tal que todos os seus valores próprios em todos os pontos fixos do deslocamento se encontram simultaneamente no exterior de $\mathbb{T}$, i. e., $\sigma[c(\tau_j)] \subset \mathbb{T}_-$, $j = \overline{1,s}$, e ainda $\det c(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}$. (Ver o Teorema 1, p. 121, em [25]).

*Caso 3.* A matriz $c$ é a matriz diagonal por blocos

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) & O^{m\times k} \\ O^{k\times m} & c_2(t) \end{pmatrix},$$

onde $c_1 \in C^{m\times m}(\mathbb{T})$, $c_2 \in C^{k\times k}(\mathbb{T})$, $k+m=n$, e

$$\sigma[c_1(\tau_j)] \subset \mathbb{T}_+, \quad j = \overline{1,s},$$

$$\sigma[c_2(\tau_j)] \subset \mathbb{T}_-, \quad j = \overline{1,s},$$

$$\det c_2(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

(Ver [25], p. 122).

*Caso 4.* A matriz $c$ é a matriz triangular por blocos

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) & O^{m\times k} \\ f(t) & c_2(t) \end{pmatrix},$$

onde os blocos diagonais $c_1$ e $c_2$ satisfazem as mesmas condições dos da matriz diagonal no caso 3 e $f \in C^{k\times m}(\mathbb{T})$, $k+m=n$. (Ver [25]: p. 122; o Teorema 2, p. 123; e o Lema 2, p. 124).

Nos casos descritos, condições suficientes de invertibilidade do operador $I - cU$, e portanto condições suficientes da propriedade de Fredholm para o operador $T$, obteremos estimativas para a dimensão do núcleo deste último operador (Capítulo 2).

## 1.6 Uma estimativa para a dimensão do núcleo de um operador integral singular com deslocamento não Carlemaneano

Como dissemos no Prefácio, em [2] foi obtida uma estimativa para a dimensão do núcleo do operador

$$T = (I - cU)P_+ + P_- : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T}),$$

onde $(U\varphi)(t) = |\alpha'(t)|^{\frac{1}{2}} \varphi(\alpha(t))$ e $\alpha$ é um deslocamento não Carlemaneano na circunferência unitária $\mathbb{T}$.

Em particular foi mostrado que :

Para uma qualquer função contínua $c \in C(\mathbb{T})$ tal que

$$|c(\tau_j)| < 1, \quad j = \overline{1, s},$$

onde $\{\tau_1, ..., \tau_s\}$ são os pontos fixos do deslocamento $\alpha$,

existe um polinómio

$$r(t) = \prod_{k=1}^{m} (t - \lambda_k), \quad |\lambda_k| > 1, \quad k = \overline{1, m},$$

tal que se verifica a condição

$$\left| r(t)c(t)r^{-1}(\alpha(t)) \right| < 1, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Em seguida, utilizando alguns resultados auxiliares, foi mostrado que

$$\dim \ker T \le m.$$

A secção 2.1 do presente trabalho é uma generalização natural, do caso escalar para o caso matricial, deste resultado.

# Capítulo 2

# Estimativas para a dimensão do núcleo de operadores integrais singulares com deslocamento

Consideremos o operador integral singular definido por (1.12)

$$T = I - cUP_+ : L_2^n(\mathbb{T}) \to L_2^n(\mathbb{T}).$$

Nos casos 1 a 4 definidos na secção 1.5, condições suficientes da propriedade de Fredholm para o operador $T$, obteremos estimativas para a dimensão do núcleo deste operador (secções 2.1 e 2.2). Um operador com coeficiente matricial do tipo de permutação será analisado na secção 2.3. Na secção 2.4 generalizaremos os resultados obtidos na circunferência unitária $\mathbb{T}$, para recta real compactificada a um ponto $\mathring{\mathbb{R}}$.

Na secção 2.5 iremos considerar um operador $T$ em $L_2(\Gamma)$, que contém o operador de deslocamento e potências deste, e um operador matricial associado $\widetilde{T}$ em $L_2^n(\Gamma)$, $\Gamma = \mathbb{T}, \mathring{\mathbb{R}}$. Mostraremos que os operadores $T$ e $\widetilde{T}$ têm os mesmos parâmetros de Fredholm. Utilizando os resultados obtidos anteriormente sobre $\widetilde{T}$, obteremos estimativas para a dimensão do núcleo do operador $T$.

Naturalmente os resultados obtidos neste trabalho relativamente ao operador

$$T = I - cUP_+ : L_2^n(\Gamma) \to L_2^n(\Gamma), \quad \Gamma = \mathbb{T}, \overset{\circ}{\mathbb{R}},$$

são válidos para o operador

$$T = I - cUP_- : L_2^n(\Gamma) \to L_2^n(\Gamma), \quad \Gamma = \mathbb{T}, \overset{\circ}{\mathbb{R}} .$$

## 2.1 Deslocamento geral

Salvo indicação contrária, $r$ irá sempre designar uma matriz polinomial $n \times n$ satisfazendo as condições

$$P_+ r^{\pm 1} P_+ = r^{\pm 1} P_+. \tag{2.1}$$

Comecemos por demonstrar os seguintes resultados:

**Proposição 2.1** *Para qualquer função matricial contínua $d \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ tal que*

$$\sigma[d(\tau_j)] \subset \mathbb{T}_+, \quad j = \overline{1, s}, \tag{2.2}$$

*existe uma norma matricial induzida $\|.\|_0$ e uma matriz polinomial $r$ satisfazendo a condição*

$$\max_{t\in\mathbb{T}} \left\| r(t)d(t)r^{-1}[\alpha(t)] \right\|_0 < 1. \tag{2.3}$$

**Demonstração.** Sejam $\rho_j$ os raios espectrais das matrizes $d(\tau_j)$:

$$\rho_j \equiv \rho[d(\tau_j)], \quad j = \overline{1, s}.$$

Pela condição (2.2) existe um $q > 0$ tal que

$$\rho_j < q < 1, \quad j = \overline{1, s}.$$

Para cada $d(\tau_j)$ existe uma norma matricial $\|.\|_j$ tal que (ver, por exemplo, o Lema 5.6.10, p. 297, em [17])

$$\rho_j \leq \|d(\tau_j)\|_j \leq q < 1, \quad j = \overline{1, s}.$$

Facilmente se mostra que a função (ver, por exemplo, a página 308, em [17])

$$\|g\|_* = \max_{j=\overline{1,s}} \{\|g\|_j\}$$

define uma norma matricial. Daqui decorre a existência de uma norma induzida $\|.\|_0$ tal que (ver, por exemplo, o Teorema 5.6.26, p. 305, em [17])

$$\|g\|_0 \leq \|g\|_* .$$

Então tem-se

$$\|d(\tau_j)\|_0 \leq \|d(\tau_j)\|_* \leq q < 1, \quad j = \overline{1, s}.$$

Agora vamos considerar uma matriz polinomial $r \in C^{n \times n}(\mathbb{T})$ da forma

$$r = r_0 E_n,$$

onde

$$r_0(t) = \prod_{k=1}^{m} (t - \lambda_k), \quad |\lambda_k| > 1, \quad k = \overline{1, m},$$

é um polinómio de grau $m$ com raízes em $\mathbb{T}_-$ e $E_n$ é a matriz identidade.

Analisemos agora a função matricial $d \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$. Vamos considerar apenas o caso em que $\max_{t\in\mathbb{T}} \|d(t)\|_0 \geq 1$ pois na hipótese contrária teríamos simplesmente $r_0(t) = 1$ [1]. Vamos escrever a função $d(t)$ na forma seguinte

$$d(t) = u(t)v(t)$$

onde

$$u(t) \in C^{n\times n}(\mathbb{T}), \quad \max_{t\in\mathbb{T}} \|u(t)\|_0 = \gamma < 1$$

e $v(t)$ é uma função real contínua em $\mathbb{T}$ tal que

$$v(t) \geq \delta > 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \tag{2.4}$$

$$v(\tau_j) < 1, \quad j = \overline{1, s}. \tag{2.5}$$

Agora constrói-se uma função real contínua não negativa em $\mathbb{T}$ tal que

$$f[\alpha(t)] > f(t)v(t). \tag{2.6}$$

Seja

$$f(t) = v[\alpha_{-1}(t)] + v[\alpha_{-1}(t)]v[\alpha_{-2}(t)] + ... + \prod_{k=1}^{n} v[\alpha_{-k}(t)],$$

onde $\alpha[\alpha_{-1}(t)] \equiv t$, $\alpha_{-k}(t) = \alpha_{-1}[\alpha_{-k+1}(t)]$.

Note-se que

$$\inf_{t\in\mathbb{T}}\{f(t)\} \geq \delta > 0,$$

---

[1] Se $\max_{t\in\mathbb{T}} \|d(t)\|_0 < 1$, como $\|U\| = 1$ e $\|P_+\| = 1$, então $T = I - dUP_+$ é um operador invertível, com inverso determinado pela série de Neumann

$$T^{-1} = I + dUP_+ + (dUP_+)^2 + ...,$$

e portanto $\dim\ker T = 0$; este caso é obviamente coerente com a estimativa que obteremos adiante (Teorema 2.1).

tendo em conta (2.4).

Mostremos que a condição (2.6) é satisfeita. De facto

$$f[\alpha(t)] =$$

$$\begin{aligned}
&= v\{\alpha_{-1}[\alpha(t)]\} + v\{\alpha_{-1}[\alpha(t)]\}v\{\alpha_{-2}[\alpha(t)]\} + ... + \prod_{k=1}^{n} v\{\alpha_{-k}[\alpha(t)]\} \\
&= v(t) + v(t)v[\alpha_{-1}(t)] + v(t)v[\alpha_{-1}(t)]v[\alpha_{-2}(t)] + ... + v(t)\prod_{k=1}^{n} v[\alpha_{-k}(t)],
\end{aligned}$$

pois $\prod_{k=1}^{n} v\{\alpha_{-k}[\alpha(t)]\} = \prod_{k=1}^{n} v[\alpha_{-k+1}(t)] = v(t)\prod_{k=1}^{n} v[\alpha_{-k}(t)]$.
Por outro lado

$$f(t)v(t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \{v[\alpha_{-1}(t)] + v[\alpha_{-1}(t)]v[\alpha_{-2}(t)] + ... + \prod_{k=1}^{n} v[\alpha_{-k}(t)]\}v(t) \\
&= v(t)v[\alpha_{-1}(t)] + v(t)v[\alpha_{-1}(t)]v[\alpha_{-2}(t)] + ... + v(t)\prod_{k=1}^{n} v[\alpha_{-k}(t)].
\end{aligned}$$

Então temos

$$f[\alpha(t)] = v(t) + f(t)v(t).$$

Com (2.4) obtemos (2.6).

Considere-se agora a função

$$h(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tau + z}{\tau - z} \ln f(\tau) \, |d\tau| \, .$$

A função $h(z)$ é contínua em $\mathbb{T}$, analítica em $\mathbb{T}_+$ e satisfaz as seguintes propriedades (ver, por exemplo, [10], [12])

1. $|h(t)| = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{T}$,
2. $|h(z)| \neq 0$, $|z| \leq 1$,

3. $h(z)$ pode ser uniformemente aproximada em $\mathbb{T}$, com uma exactidão arbitrária $\varepsilon$, por um polinómio de grau finito com todas as suas raízes em $\mathbb{T}_-$ (ver, por exemplo, [36]).

Seja $r_0(t)$ um tal polinómio e

$$|h(t) - r_0(t)| < \varepsilon < \delta. \tag{2.7}$$

Regressemos à função $d(t) = u(t)v(t)$ e avaliemos a sua norma

$$\max_{t\in\mathbb{T}} \|u(t)v(t)\|_0 \leq \max_{t\in\mathbb{T}} |v(t)| \, . \max_{t\in\mathbb{T}} \|u(t)\|_0 = \gamma \, \|v(t)\|_\infty \tag{2.8}$$

Tendo em conta (2.8), (2.6) e depois (2.7) e a propriedade 1 acima, podemos estimar a norma da função $r(t)d(t)r^{-1}[\alpha(t)]$. Vejamos

$$\begin{aligned} \max_{t\in\mathbb{T}} \left\|r(t)d(t)r^{-1}[\alpha(t)]\right\|_0 &\leq \max_{t\in\mathbb{T}} \left\|r_0(t)u(t)v(t)r_0^{-1}[\alpha(t)]\right\|_0 \\ \leq \gamma \left\|\frac{v(t)r_0(t)}{r_0[\alpha(t)]}\right\|_\infty &\leq \gamma \left\|\frac{v(t)f(t)}{r_0[\alpha(t)]}\right\|_\infty \left\|\frac{r_0(t)}{f(t)}\right\|_\infty \\ \leq \gamma \left\|\frac{f[\alpha(t)]}{f(t)} \frac{f(t)}{r_0[\alpha(t)]}\right\|_\infty \left\|\frac{r_0(t)}{f(t)}\right\|_\infty &\leq \gamma \left\|\frac{f(t)}{r_0(t)}\right\|_\infty \left\|\frac{r_0(t)}{f(t)}\right\|_\infty . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Continuando tem-se

$$\begin{aligned} \left\|\frac{f(t)}{r_0(t)}\right\|_\infty &= \left\|\frac{h(t)}{r_0(t)}\right\|_\infty = \left\|\frac{h(t)-r_0(t)}{r_0(t)} + 1\right\|_\infty \\ \leq \|h(t) - r_0(t)\| \left\|\frac{1}{r_0(t)}\right\|_\infty &+ 1 < \varepsilon \left\|\frac{1}{r_0(t)}\right\|_\infty + 1. \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\left\|\frac{1}{r_0(t)}\right\|_\infty = \frac{1}{\inf_{t\in\mathbb{T}}\{|r_0(t)|\}},$$

e

$$\begin{aligned} |r_0(t)| &= |h(t) - (h(t) - r_0(t))| \geq |h(t) - |h(t) - r_0(t)||_{\forall t\in\mathbb{T}} \\ &> (f(t) - \varepsilon)_{\forall t\in\mathbb{T}} > \widetilde{f} - \varepsilon, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a designação $\widetilde{f} = \inf_{t\in\mathbb{T}}\{f(t)\}$, $\widetilde{f} \geq \delta$,

obtem-se

$$\left\|\frac{f(t)}{r_0(t)}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\widetilde{f}-\varepsilon} + 1 = \frac{\widetilde{f}}{\widetilde{f}-\varepsilon}. \tag{2.10}$$

Por outro lado

$$\left\|\frac{r_0(t)}{f(t)}\right\|_\infty = \left\|\frac{r_0(t)-h(t)}{h(t)} + 1\right\|_\infty < \varepsilon\left\|\frac{1}{h(t)}\right\|_\infty + 1.$$

Tendo em conta que

$$\left\|\frac{1}{h(t)}\right\|_\infty = \frac{1}{\inf_{t\in\mathbb{T}}\{|h(t)|\}},$$

e, para $\forall t \in \mathbb{T}$,

$$|h(t)| = f(t) \geq \widetilde{f},$$

obtem-se

$$\left\|\frac{r_0(t)}{f(t)}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\widetilde{f}} + 1 = \frac{\varepsilon+\widetilde{f}}{\widetilde{f}}. \tag{2.11}$$

Com (2.10) e (2.11), de (2.9) tem-se

$$\max_{t\in\mathbb{T}}\left\|r(t)d(t)r^{-1}[\alpha(t)]\right\|_0 < \gamma\frac{\widetilde{f}+\varepsilon}{\widetilde{f}-\varepsilon}.$$

Escolhendo $\varepsilon$ de modo a que

$$\varepsilon < \widetilde{f}\frac{1-\gamma}{1+\gamma},$$

obtem-se a desigualdade (2.3). ■

**Proposição 2.2** *Sejam*

$$N = I - aUP_+, \tag{2.12}$$

$$R = rP_- + (I-aU)P_+,$$

$$M = I - rP_+r^{-1}P_-N^{-1},$$

*onde* $a \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$, $N$ *é um operador invertível,* $r$ *é uma matriz polinomial* $n \times n$ *satisfazendo as condições (2.1) e*

$$l_1(r) = \sum_{i=1}^{n} \max_{j=\overline{1,n}} l_{i,j}, \tag{2.13}$$

*onde* $l_{i,j}$ *é o grau do elemento* $r_{i,j}$ *da matriz polinomial* $r$. *Então têm lugar as seguintes relações*

$$\dim\ker R = \dim\ker M \leq l_1(r). \tag{2.14}$$

**Demonstração.** Considere-se o operador invertível [2]

$$K = (P_+ + P_- r^{-1} P_-) N^{-1}.$$

Calculemos o produto $RK$. Temos

$$R = rP_- + I - P_- - aUP_+ = (r-1)P_- + N$$

e

$$\begin{aligned} RK &= rP_- r^{-1} P_- N^{-1} - P_- r^{-1} P_- N^{-1} + NP_+ N^{-1} + NP_- r^{-1} P_- N^{-1} \\ &= r(I - P_+) r^{-1} P_- N^{-1} + I - P_- N^{-1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow RK = M.$$

Logo

$$\dim\ker R = \dim\ker M.$$

[2] O operador inverso do operador $P_+ + P_- r^{-1} P_-$ é representado pela fórmula

$$(P_+ + P_- r^{-1} P_-)^{-1} = (r^{-1} P_+ + P_- + P_+ r^{-1} P_-).rI$$

Além disso temos

$$p \in \ker M \Leftrightarrow p = rP_+r^{-1}P_-N^{-1}p.$$

Utilizando as condições (2.1) e $P_+ = I - P_-$ obtemos

$$p = -P_+rP_-r^{-1}P_-N^{-1}p,$$

o que significa que $p$ pertence à imagem do operador de dimensão finita $P_+rP_-$. Facilmente se verifica que

$$\dim \operatorname{im} P_+rP_- = l_1(r).$$

Então $\dim \ker M \le l_1(r)$ e, portanto, têm lugar as relações (2.14). ∎

Sejam $d(t)$ uma função matricial contínua que satisfaz a condição (2.2), $R_d$ o conjunto de todas as matrizes polinomiais $r$ que satisfazem as condições (2.1) e (2.3) e $l_1(r)$ o número definido por (2.13). Denotemos

$$l(d) = \min_{r \in R_d}\{l_1(r)\}. \tag{2.15}$$

As Proposições 2.1 e 2.2 permitem obter uma estimativa para a dimensão do núcleo do operador (1.12).

**Teorema 2.1** *Se $c \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ em (1.12) satisfaz a condição (2.2), então é válida a estimativa*

$$\dim \ker T \le l(c). \tag{2.16}$$

**Demonstração.** De acordo com a Proposição 2.1, existe uma norma matricial induzida $\|.\|_0$ e uma matriz polinomial $r$ tal que $a(t) = r(t)c(t)r^{-1}[\alpha(t)]$ satisfaz a condição (2.3). Daqui decorre que o operador definido por (2.12) é invertível. De facto, de (2.3) temos $\max_{t\in\mathbb{T}} \|a(t)\|_0 < 1$; como $\|U\| = 1$ e $\|P_+\| = 1$, então $N = I - aUP_+$ é um operador invertível, com inverso determinado pela série de Neumann

$$N^{-1} = I + dUP_+ + (dUP_+)^2 + ....$$

Agora escrevemos o operador $T$ como um produto dos operadores

$$T = (I - cUP_+) = r^{-1}[rP_- + (I - aU)P_+](P_- + rP_+).$$

Os operadores $r^{-1}I$ e $(P_- + rP_+)$ são ambos continuamente invertíveis e portanto os seus núcleos são triviais. Então

$$\dim\ker T = \dim\ker[rP_- + (I - aU)P_+] = \dim\ker R.$$

Aplicando a Proposição 2.2 obtemos a desigualdade (2.16). ■

## 2.2 Deslocamento linear fraccionário

Considere-se agora o deslocamento linear fraccionário não Carlemaneano definido por (1.8)

$$\alpha(t) = \frac{at + b}{\bar{b}t + \bar{a}} : \mathbb{T} \to \mathbb{T};$$

e o operador de deslocamento isométrico definido por (1.10)

$$(V\varphi)(t) = \alpha_+(t)\varphi(\alpha(t)).$$

Facilmente constatamos que todos os resultados anteriores são válidos face à substituição de $U$ por $V$ (ver a secção 1.4).

### 2.2.1 Caso 1

Assim seja agora $T$ o operador

$$T = I - cVP_+ : L_2^n(\mathbb{T}) \to L_2^n(\mathbb{T}), \tag{2.17}$$

onde supomos que a matriz $c \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ satisfaz a condição

$$\sigma[c(\tau_j)] \subset \mathbb{T}_+, \quad j = 1, 2. \tag{2.18}$$

As considerações anteriores e o Teorema 2.1 permitem-nos escrever:

**Teorema 2.2** *Se $c \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ em (2.17) satisfaz a condição (2.18), então é válida a estimativa*

$$\dim\ker T \leq l(c), \tag{2.19}$$

*onde $l(c)$ é o número definido por (2.15) para a matriz $c$.*

### 2.2.2 Caso 2

Agora vamos considerar o operador

$$T = I - cVP_+ : L_2^n(\mathbb{T}) \to L_2^n(\mathbb{T}), \tag{2.20}$$

onde supomos que a matriz $c \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ tem as propriedades

$$\sigma[c(\tau_j)] \subset \mathbb{T}_-, \quad j = 1, 2, \tag{2.21}$$

$$\det c(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}. \tag{2.22}$$

É sabido que se a condição (2.22) for satisfeita, então a função matricial contínua $c$ admite a factorização (1.3) em $L_2^{n\times n}(\mathbb{T})$. Suponhamos ainda que a condição (1.4) é satisfeita.

Têm lugar os resultados seguintes:

**Proposição 2.3** *Sejam*

$$A : L_2^n(\mathbb{T}) \to L_2^n(\mathbb{T})$$

*um operador linear limitado, e*

$$D = \operatorname{diag}\{D_-, D_+\}$$

*a matriz diagonal, onde*

$$D_- = \operatorname{diag}\{t^{k_1}, t^{k_2}, ..., t^{k_p}\},$$

$$D_+ = \operatorname{diag}\{t^{m_1}, t^{m_2}, ..., t^{m_q}\},$$

$k_j < 0$, $j = \overline{1,p}$; $m_i \geq 0$, $i = \overline{1,q}$; *e* $p + q = n$.

*São válidas as desigualdades*

$$\dim\ker(P_- + AP_+) + \sum_{j=1}^{p} k_j \leq \dim\ker(DP_- + AP_+),$$

$$\dim\ker(DP_- + AP_+) \leq \dim\ker(P_- + AP_+) + \sum_{i=1}^{q} m_i. \tag{2.23}$$

**Demonstração.** Comecemos por denotar

$$D_1 = \operatorname{diag}\{D_-, E_q\}, \quad D_2 = \operatorname{diag}\{E_p, D_+\}.$$

Os operadores

$$D_1 P_- + P_+, \quad D_2^{-1} P_- + P_+,$$

são invertíveis à esquerda. Logo tem-se

$$\dim\ker(D_1 P_- + P_+) = \dim\ker(D_2^{-1} P_- + P_+) = 0,$$

e

$$\dim\operatorname{coker}(D_1 P_- + P_+) = -\sum_{j=1}^{p} k_j,$$

$$\dim \operatorname{coker}(D_2^{-1}P_- + P_+) = \sum_{i=1}^{q} m_i.$$

Verifica-se a igualdade

$$\begin{aligned} (DP_- + AP_+)(D_2^{-1}P_- + P_+) &= (P_- + AP_+)(D_1P_- + P_+) \\ &= B \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde designamos

$$B = D_1P_- + AP_+.$$

De (2.24) podemos concluir que

$$\dim \ker(DP_- + AP_+) \geq \dim \ker B$$

e

$$\begin{gathered} \dim \ker(DP_- + AP_+) \leq \dim \ker B + \dim \operatorname{coker}(D_2^{-1}P_- + P_+) \\ \Leftrightarrow \dim \ker(DP_- + AP_+) \leq \dim \ker B + \sum_{i=1}^{q} m_i; \end{gathered}$$

ou seja,

$$\dim \ker B \leq \dim \ker(DP_- + AP_+) \leq \dim \ker B + \sum_{i=1}^{q} m_i. \tag{2.25}$$

Ainda de (2.24) tem-se

$$\dim \ker(P_- + AP_+) \geq \dim \ker B$$

e

$$\begin{gathered} \dim \ker(P_- + AP_+) \leq \dim \ker B + \dim \operatorname{coker}(D_1P_- + P_+) \\ \Leftrightarrow \dim \ker(P_- + AP_+) \leq \dim \ker B - \sum_{j=1}^{p} k_j; \end{gathered}$$

ou seja,

$$\dim \ker B \leq \dim \ker(P_- + AP_+) \leq \dim \ker B - \sum_{j=1}^{p} k_j. \tag{2.26}$$

Das desigualdades (2.25) e (2.26) decorrem (2.23). ■

**Proposição 2.4** *Seja $T$ o operador definido por (2.20). Se as condições (2.22) e (1.3) com (1.4) forem satisfeitas, então é válida a estimativa*

$$\dim\ker T \leq \dim\ker(I - \Lambda^{-1}c_-^{-1}c_+^{-1}(\alpha_{-1})V^{-1}P_+) + \sum_{\varkappa_j<0} |\varkappa_j| \,. \tag{2.27}$$

**Demonstração.** Considere-se o produto do operador $T$ com um determinado operador continuamente invertível [3]:

$$(I - cVP_+)(c_-P_- - c_+^{-1}(\alpha_{-1})V^{-1}P_+)$$

$$= c_-\Lambda(\Lambda^{-1}P_- + P_+ - \Lambda^{-1}c_-^{-1}c_+^{-1}(\alpha_{-1})V^{-1}P_+),$$

onde usamos a propriedade $VP_+ = P_+V$. Como $c_-\Lambda.I$ é um operador continuamente invertível, temos

$$\dim\ker T = \dim\ker Z, \tag{2.28}$$

onde

$$Z = \Lambda^{-1}P_- + (I - \Lambda^{-1}c_-^{-1}c_+^{-1}(\alpha_{-1})V^{-1})P_+.$$

Analisemos este operador; tem-se

$$\Lambda^{-1} = \mathrm{diag}\,\{t^{-\varkappa_j}\},$$

com $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq ... \geq \varkappa_n$.

[3] O operador inverso do operador $c_-P_- - c_+^{-1}(\alpha_{-1})V^{-1}P_+$ é representado pela fórmula

$$(c_-P_- - c_+^{-1}(\alpha_{-1})V^{-1}P_+)^{-1} = c_-^{-1}P_- - c_+(\alpha_{-1})V^{-1}P_+$$

Tendo em conta a Proposição 2.3, que $m_i = -\varkappa_i$, $\varkappa_i < 0$, com

$$A = I - \Lambda^{-1} c_-^{-1} c_+^{-1}(\alpha_{-1}) V^{-1}$$

e

$$P_- + (I - \Lambda^{-1} c_-^{-1} c_+^{-1}(\alpha_{-1}) V^{-1}) P_+ = I - \Lambda^{-1} c_-^{-1} c_+^{-1}(\alpha_{-1}) V^{-1} P_+;$$

de (2.28), obtemos (2.27). ■

Agora vamos analisar o operador $I - \Lambda^{-1} c_-^{-1} c_+^{-1}(\alpha_{-1}) V^{-1} P_+$ em (2.27). Comecemos por denotar

$$\widetilde{c} = \Lambda^{-1} c_-^{-1} c_+^{-1}(\alpha_{-1}) = c_+ c^{-1} c_+^{-1}(\alpha_{-1}).$$

Tendo em conta (1.4), os valores próprios das matrizes $c^{-1}$ e $\widetilde{c}$ coincidem nos pontos fixos do deslocamento. Com (2.21), $\widetilde{c}$ satisfaz as condições da Proposição 2.1, i. e., para $\widetilde{c}$ existe uma matriz polinomial $r$ satisfazendo as condições (2.1) e (2.3). Para esta matriz $\widetilde{c}$ seja $l(\widetilde{c})$ o número definido por (2.15). Como os operadores $V^{-1}$ e $V$ têm propriedades similares, o operador $I - \widetilde{c} V^{-1} P_+$ satisfaz todas as condições do Teorema 2.2. Então

$$\dim \ker (I - \widetilde{c} V^{-1} P_+) \leq l(\widetilde{c}).$$

Com (2.27) obtemos a estimativa seguinte.

**Teorema 2.3** *Seja $T$ o operador definido por (2.20). Se as condições (2.21), (2.22) e (1.3) com (1.4), forem satisfeitas, então é válida a estimativa*

$$\dim \ker T \leq l(\widetilde{c}) + \sum_{\varkappa_j < 0} |\varkappa_j| \,, \tag{2.29}$$

*onde $\varkappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, n}$, são os índices parciais da factorização (1.3) da matriz $c$.*

### 2.2.3 Caso 3

Considere-se o operador

$$T = I - cVP_+, \tag{2.30}$$

onde agora é suposto que $c \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ seja uma matriz diagonal por blocos

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) & O^{m\times k} \\ O^{k\times m} & c_2(t) \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

com $c_1 \in C^{m\times m}(\mathbb{T})$, $c_2 \in C^{k\times k}(\mathbb{T})$, $k + m = n$, e

$$\sigma[c_1(\tau_j)] \subset \mathbb{T}_+, \quad j = 1, 2, \tag{2.32}$$

$$\sigma[c_2(\tau_j)] \subset \mathbb{T}_-, \quad j = 1, 2, \tag{2.33}$$

$$\det c_2(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}. \tag{2.34}$$

Vamos reescrever o operador $T$ na forma matricial. Temos

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & O^{m\times k} \\ O^{k\times m} & T_2 \end{pmatrix} : L_2^n(\mathbb{T}) \to L_2^n(\mathbb{T}), \tag{2.35}$$

onde

$$T_1 = I - c_1VP_+ : L_2^m(\mathbb{T}) \to L_2^m(\mathbb{T}),$$

$$T_2 = I - c_2VP_+ : L_2^k(\mathbb{T}) \to L_2^k(\mathbb{T}).$$

Os vectores

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_j \end{pmatrix} \in L_2^n(\mathbb{T}),$$

onde $\alpha_i \in L_2^m(\mathbb{T})$ são funções linearmente independentes tais que:

$$\alpha_i \in \ker T_1, i = 1, 2, ..., \dim\ker T_1,$$

e $\beta_j \in L_2^k(\mathbb{T})$ são funções linearmente independentes tais que:

$$\beta_j \in \ker T_2, j = 1, 2, ..., \dim \ker T_2,$$

são soluções linearmente independentes da equação $T\varphi = 0$ e constituem uma base do núcleo do operador $T$.

Então obtemos

$$\dim \ker T = \dim \ker T_1 + \dim \ker T_2. \tag{2.36}$$

Notemos agora que:

1. O operador $T_1$ satisfaz as condições do Teorema 2.2; seja $l(c_1)$ o número definido por (2.15) para a matriz $c_1$.

2. O operador $T_2$ satisfaz as condições do Teorema 2.3; seja $l(\widetilde{c}_2)$ o número definido por (2.15) para a matriz $\widetilde{c}_2$ e $\varkappa_j$ os índices parciais da factorização (1.3) da matriz $c_2$.

As considerações anteriores permitem-nos escrever a estimativa seguinte.

**Teorema 2.4** *Seja $T$ o operador definido por (2.30). Se as condições (2.32), (2.33) e (2.34) forem satisfeitas, então é válida a estimativa*

$$\dim \ker T \leq l(c_1) + l(\widetilde{c}_2) + \sum_{\varkappa_j < 0} |\varkappa_j| \, .$$

### 2.2.4 Caso 4

Considere-se o operador

$$T = I - cVP_+, \tag{2.37}$$

onde $c \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ é agora uma matriz triangular por blocos

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) & O^{m\times k} \\ f(t) & c_2(t) \end{pmatrix},$$

onde os blocos diagonais $c_1 \in C^{m\times m}(\mathbb{T})$ e $c_2 \in C^{k\times k}(\mathbb{T})$ satisfazem as condições (2.32), (2.33) e (2.34), e $f \in C^{k\times m}(\mathbb{T})$, $k+m=n$.

Comecemos por escrever o operador $T$ na forma matricial. Temos

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & O^{m\times k} \\ F & T_2 \end{pmatrix} : L_2^n(\mathbb{T}) \to L_2^n(\mathbb{T}), \tag{2.38}$$

onde

$$T_1 = I - c_1 V P_+ : L_2^m(\mathbb{T}) \to L_2^m(\mathbb{T}),$$

$$T_2 = I - c_2 V P_+ : L_2^k(\mathbb{T}) \to L_2^k(\mathbb{T})$$

e

$$F = -f V P_+ : L_2^m(\mathbb{T}) \to L_2^k(\mathbb{T}).$$

Seja $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in L_2^n(\mathbb{T})$, $\alpha \in L_2^m(\mathbb{T})$ e $\beta \in L_2^k(\mathbb{T})$. Temos

$$T\varphi = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ F & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} T_1\alpha \\ F\alpha + T_2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Consideremos os vectores

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_j \end{pmatrix},$$

onde $\alpha_i$ são funções linearmente independentes tais que:

$$\alpha_i \in \ker T_1, i = 1, 2, ..., \dim \ker T_1,$$

e $\beta_j$ são funções linearmente independentes tais que:

$$\beta_j \in \ker T_2, j = 1, 2, ..., \dim \ker T_2.$$

Neste caso constatamos que $\begin{pmatrix} \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix}$ não são soluções da equação (2.39), em geral. Os vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_j \end{pmatrix}$ são soluções linearmente independentes da equação (2.39). Tem-se

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_j \end{pmatrix} \in \ker T.$$

Estas não são as únicas soluções de (2.39), em geral, como veremos em seguida. Considere-se o vector

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta \end{pmatrix},$$

onde $\alpha_i \in \ker T_1$. A equação (2.39) vem:

$$T_2 \beta = -F \alpha_i. \tag{2.40}$$

Seja $\beta_{p,i}$ uma solução particular da equação não-homogénia (2.40); então a função $\beta_j + \beta_{p,i}$ é solução de (2.40), i. e.,

$$T_2(\beta_j + \beta_{p,i}) = -F \alpha_i.$$

Logo, para cada $\alpha_i \in \ker T_1$, tal que $F\alpha_i \in \operatorname{im} T_2$, com qualquer $\beta_j \in \ker T_2$, $j = 1, 2, ..., \dim \ker T_2$, tem-se

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_j + \beta_{p,i} \end{pmatrix} \in \ker T.$$

O número de soluções linearmente independentes deste tipo é, no máximo, igual a $\dim\ker T_1$.

Deste modo concluimos que o núcleo do operador $T$ está contido no envólucro linear dos vectores

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_{p,i} \end{pmatrix},$$

onde $i = 1, 2, ..., \dim\ker T_1,\ \ j = 1, 2, ..., \dim\ker T_2$. Logo

$$\dim\ker T \leq \dim\ker T_1 + \dim\ker T_2. \tag{2.41}$$

As considerações anteriores e o Teorema 2.4 permitem-nos escrever a estimativa seguinte.

**Teorema 2.5** *Seja $T$ o operador definido por (2.37). Se as condições (2.32), (2.33) e (2.34) forem satisfeitas, então é válida a estimativa*

$$\dim\ker T \leq l(c_1) + l(\widetilde{c}_2) + \sum_{\varkappa_j<0} |\varkappa_j| \,.$$

*Observação.* A igualdade prevista em (2.41) pode acontecer, em particular, quando a equação (2.40) é resolúvel para $\forall \alpha_i$, $i = 1, 2, ..., \dim\ker T_1$, ou se o operador (2.30) puder ser escrito como um produto do operador (2.37) por um operador invertível. É o que acontece, por exemplo, nos dois casos seguintes:

1. Seja o operador $T_1$ definido em (2.38) invertível à esquerda e $T_1^{(-1)}$ um seu inverso à esquerda. Constatamos que

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -FT_1^{(-1)} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & O \\ F & T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{pmatrix}.$$

O primeiro operador do primeiro membro da igualdade anterior é invertível; logo, com (2.36), tem-se

$$\dim\ker T = \dim\ker T_1 + \dim\ker T_2. \tag{2.42}$$

2. Seja o operador $T_2$ definido em (2.38) invertível à direita e $T_2^{(-1)}$ um seu inverso à direita. Constatamos que

$$\begin{pmatrix} T_1 & O \\ F & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -T_2^{(-1)}F & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{pmatrix}.$$

Analogamente ao caso anterior, é válida a igualdade (2.42).

## 2.3 Com coeficiente matricial do tipo de permutação

Nesta secção analisamos o operador $I - cVP_+$, em que a matriz $c$ pode ter valores próprios, nos pontos fixos do deslocamento, dentro e fora da circunferência unitária.

Assim, considere-se o operador

$$T = I - cVP_+, \tag{2.43}$$

onde $c \equiv [c_{i,j}]^{n\times n}$, $c_{i,j} \in C(\mathbb{T})$, $i,j = \overline{1,n}$, é uma matriz do tipo de permutação, i. e., uma matriz na qual um único elemento, em cada linha e coluna, é uma função não identicamente nula, e todos os outros elementos são iguais a zero. Vamos mostrar que a dimensão do núcleo do operador matricial $T$ é igual à soma das dimensões dos núcleos de determinados operadores escalares.

Escrevendo o operador $T$ na forma matricial temos:

$$T = \begin{pmatrix} I - b_{1,1} & -b_{1,2} & \dots & & -b_{1,n} \\ -b_{2,1} & I - b_{2,2} & & & -b_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -b_{n-1,1} & & & & -b_{n-1,n} \\ -b_{n,1} & -b_{n,2} & \dots & -b_{n,n-1} & I - b_{n,n} \end{pmatrix},$$

onde usamos a notação

$$b_{i,j} \equiv c_{i,j} V P_+.$$

Em cada linha $i$ apenas um dos operadores $b_{i,j}$, $j = \overline{1,n}$ é não identicamente nulo; designemos este operador por $b_i$, e por $c_i$ a correspondente função não identicamente nula. Podemos proceder do seguinte modo:

1. Se $b_1 \equiv b_{1,j}$, $j = \overline{2,n}$, multiplicamos à direita o operador $T$ pelo operador invertível

$$\begin{pmatrix} I & 0 & \dots & b_1 & \dots & 0 \\ 0 & I & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Se $b_1 \equiv b_{1,1}$, ignoramos este passo e passamos ao seguinte.

2. Multiplicamos o operador obtido pelo operador

$$\begin{pmatrix} I & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & I & \dots & d_{2,j} & \dots & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & I \end{pmatrix},$$

onde $d_{2,j}$, $j = \overline{3,n}$, é o elemento não nulo da segunda linha, acima da diagonal principal, do operador obtido pelo produto anterior; notemos que $d_{2,j} = b_2$ ou $d_{2,j} = b_2 b_1$.

Continuamos este processo até obtermos o operador matricial triangular

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & ... & & 0 \\ f_{2,1} & T_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ f_{n-1,1} & & & & 0 \\ f_{n,1} & f_{n,2} & ... & f_{n,n-1} & T_n \end{pmatrix},$$

onde $f_{i,j} = b_{r_1}...b_{r_l}$, $l \leq n-1$ e

$$T_k = I - b_{s_1}...b_{s_{m_k}}, m_k \leq n. \tag{2.45}$$

Notemos que $\sum_{k=1}^{n} m_k = n$.

3. Tendo em conta que se $f_{n,j} \neq 0$, então $T_j = I$, $j = \overline{1,n}$, é válida a igualdade

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & ... & & 0 \\ f_{2,1} & T_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ f_{n-1,1} & & & & 0 \\ f_{n,1} & f_{n,2} & ... & f_{n,n-1} & T_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & ... & & 0 \\ f_{2,1} & I & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ f_{n-1,1} & & & & 0 \\ f_{n,1} & f_{n,2} & ... & f_{n,n-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 & ... & & 0 \\ 0 & T_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & ... & 0 & T_n \end{pmatrix}.$$

Daqui decorre que a dimensão do núcleo (conúcleo) do operador matricial $T$ é igual à soma das dimensões dos núcleos (conúcleos, respectivamente) dos operadores escalares $T_k$, $k = \overline{1, n}$. Assim podemos escrever:

**Proposição 2.5** *O operador $T$ definido por (2.43) é um operador de Fredholm em $L_2^n(\mathbb{T})$ se e só se todos os operadores $T_k$, $k = \overline{1, n}$ definidos por (2.45) são operadores de Fredholm em $L_2(\mathbb{T})$. Neste caso*

$$\dim \ker T = \sum_{k=1}^{n} \dim \ker T_k$$

*e*

$$\dim \operatorname{coker} T = \sum_{k=1}^{n} \dim \operatorname{coker} T_k.$$

Agora suponhamos que as funções não identicamente nulas $c_i$, $i = \overline{1, n}$, elementos da matriz $c$, são prolongáveis analiticamente em $\mathbb{T}_+$, com a possível excepção de $c_n$; usando a propriedade $VP_+ = P_+V$, cada um dos operadores escalares $T_k$ pode ser escrito da maneira seguinte

$$T_k = I - c_{s_1} c_{s_2}(\alpha) c_{s_3}(\alpha^2) ... c_{s_{m_k}}(\alpha^{m_k - 1}) V^{m_k} P_+, \quad m_k \leq n.$$

Designando

$$g_k \equiv c_{s_1} c_{s_2}(\alpha) c_{s_3}(\alpha^2) ... c_{s_{m_k}}(\alpha^{m_k - 1}), \tag{2.46}$$

podemos escrever o operador $T_k$ na forma

$$T_k = I - g_k V^{m_k} P_+. \tag{2.47}$$

Tem-se $g_k \in C(\mathbb{T})$ e $V^{m_k}$ um operador de deslocamento isométrico; assim os Teoremas 2.2 e 2.3, podem ser usados para estimar a dimensão do núcleo de cada um dos operadores escalares $T_k$ e logo do operador matricial $T$ definido por (2.43). Analisemos esta possibilidade mais detalhadamente: aplicamos as estimativas (2.19) ou (2.29) ao operador $T_k$, conforme $|g_k(\tau_j)| < 1$ ou $|g_k(\tau_j)| > 1$, respectivamente; $\tau_j$, $j = 1, 2$, são os pontos pontos fixos do deslocamento. Por outro lado, podemos constatar que $g_k(\tau_j)$, $k = \overline{1, n}$, coincidem com os valores próprios da matriz $c$ nos pontos pontos fixos do deslocamento. Temos

$$\det(\lambda - c) = 0 \Leftrightarrow \det\left[(\lambda - c)\widetilde{c}_1\right] = 0,$$

onde $\widetilde{c}_1$ é a matriz (2.44) com $c_1$ no lugar de $b_1$ e, tal como anteriormente, $c_1$ é a única função não identicamente nula da linha 1. Procedendo de maneira análoga aos pontos 1., 2. e 3. acima, obtemos os valores próprios da matriz $c$

$$\lambda_k(t) = c_{s_1}(t) ... c_{s_{m_k}}(t), \quad m_k \leq n,$$

com $\sum_{k=1}^{n} m_k = n$.

Comparando com (2.46) constatamos a igualdade

$$\lambda_k(\tau_j) = g_k(\tau_j).$$

Designemos por $N_+$ o conjunto

$$N_+ = \{g_k : |g_k(\tau_j)| < 1\}, \tag{2.48}$$

e por $N_-$ o conjunto

$$N_- = \{g_k : |g_k(\tau_j)| > 1 \wedge |g_k(t)| \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}\}. \tag{2.49}$$

Notemos agora que:

1. Cada operador $T_k$ tal que $g_k \in N_+$ satisfaz as condições do Teorema 2.2; seja $l(g_k)$ o número definido por (2.15) para a função $g_k$.

2. Cada operador $T_k$ tal que $g_k \in N_-$ satisfaz as condições do Teorema 2.3; seja $l(\widetilde{g}_k)$ o número definido por (2.15) para a função $\widetilde{g}_k$.

As considerações anteriores permitem-nos escrever a estimativa seguinte.

**Teorema 2.6** *Sejam $T$ o operador definido por (2.43), $g_k$ as funções definidas por (2.46), e $N_\pm$ os conjuntos definidos por (2.48) e (2.49). É válida a estimativa*

$$\dim \ker T \leq \sum_{g_k \in N_+} l(g_k) + \sum_{g_k \in N_-} \left[ l(\widetilde{g}_k) + \max\{0, -\operatorname{ind} g_k\} \right].$$

Como exemplo ilustrativo, seja $T$ o operador definido por (2.43) com $c \in C^{n \times n}(\mathbb{T})$ a matriz do tipo de permutação

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & c_1 \\ 0 & & & c_2 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & c_{n-1} & & & 0 \\ c_n & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando a notação

$$b_k \equiv c_k V P_+, k = \overline{1, n},$$

obtemos:

(a) Se $n$ for um número par,

$$\dim \ker T = \dim \ker(I - b_n b_1) + \dim \ker(I - b_{n-1} b_2) +$$
$$+ ... + \dim \ker \left( I - b_{\frac{n+2}{2}} b_{\frac{n}{2}} \right). \tag{2.50}$$

(b) Se $n$ for um número ímpar,

$$\dim\ker T = \dim\ker(I - b_n b_1) + \dim\ker(I - b_{n-1}b_2) + ...+$$
$$+\dim\ker\left(I - b_{\frac{n+3}{2}} b_{\frac{n-1}{2}}\right) + \dim\ker\left(I - b_{\frac{n+1}{2}}\right). \qquad (2.51)$$

Se apriori as funções $c_k$, $k = \overline{1, \frac{n}{2}}$ ($n$ par) ou $k = \overline{1, \frac{n-1}{2}}$ ($n$ ímpar), forem prolongáveis analiticamente em $\mathbb{T}_+$, as igualdades (2.50) e (2.51) podem ser escritas na forma:

(a) ($n$ par)

$$\dim\ker T = \dim\ker(I - c_n c_1(\alpha)V^2P_+) + \dim\ker(I - c_{n-1}c_2(\alpha)V^2P_+)+$$
$$+... + \dim\ker\left(I - c_{\frac{n+2}{2}} c_{\frac{n}{2}}(\alpha)V^2P_+\right). \qquad (2.52)$$

(b) ($n$ ímpar)

$$\dim\ker T = \dim\ker(I - c_n c_1(\alpha)V^2P_+) + \dim\ker(I - c_{n-1}c_2(\alpha)V^2P_+) + ...+$$
$$+\dim\ker\left(I - c_{\frac{n+3}{2}} c_{\frac{n-1}{2}}(\alpha)V^2P_+\right) + \dim\ker\left(I - c_{\frac{n+1}{2}} VP_+\right). \qquad (2.53)$$

## 2.4 Deslocamento na recta real

Nesta secção iremos considerar o operador integral singular na recta real compactificada a um ponto,

$$T = I - cUP_+ : L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(\mathbb{R}), \qquad (2.54)$$

onde $c \in C^{n\times n}(\mathring{\mathbb{R}})$ é uma função matricial contínua,

$$(U\varphi)(t) = \varphi(t+h), \quad h \in \mathbb{R}^+,$$

é o operador de deslocamento isométrico com o único ponto fixo no infinito. Ao operador de deslocamento $U$ em $\overset{\circ}{\mathbb{R}}$, corresponde um operador de deslocamento linear fraccionário que preserva a orientação na circunferência unitária $\mathbb{T}$ do tipo de $V$ definido por (1.10) (ver a secção 1.4).

Como é sabido (ver, por exemplo, [13], ver também [35], p. 208), todos os resultados obtidos na circunferência unitária $\mathbb{T}$ (secções 2.1 a 2.3) são transferíveis para a recta real compactificada a um ponto $\overset{\circ}{\mathbb{R}}= \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, com os devidos ajustamentos e correspondências, entre as quais destacamos:

1. A uma matriz polinomial em $\mathbb{T}$, com zeros no seu exterior, $\mathbb{T}_-$, corresponde uma matriz racional em $\overset{\circ}{\mathbb{R}}$, com zeros no semi-plano inferior, $\mathbb{C}_-$ (considerando a orientação positiva de $\mathbb{T}$), com elementos da forma $r_{i,j}(t) = p_{i,j}\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)$, onde $p_{i,j}$ é um polinómio. Deste modo, o número $l$ definido por (2.15) para uma matriz $d_1 \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$, é, correspondentemente, definido por (2.58) para uma matriz $d_2 \in C^{n\times n}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$.

2. À factorização em $L_2^{n\times n}(\mathbb{T})$ (1.3) de uma função matricial contínua em $\mathbb{T}$, corresponde a factorização em $L_2^{n\times n}(\mathbb{R})$ (1.5) de uma função matricial contínua em $\overset{\circ}{\mathbb{R}}$.

Assim sendo, podemos escrever, da Proposição 2.1:

**Proposição 2.6** *Para qualquer função matricial contínua $d \in C^{n\times n}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ tal que*

$$\sigma[d(\infty)] \subset \mathbb{T}_+, \tag{2.55}$$

*existe uma norma matricial induzida $\|.\|_0$ e uma matriz racional $r$ com elementos da forma $r_{i,j}(t) = p_{i,j}\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)$, onde $p_{i,j}$ é um polinómio, satisfazendo as condições*

$$\max_{t\in\overset{\circ}{\mathbb{R}}} \left\|r(t)d(t)r^{-1}(t+h)\right\|_0 < 1 \tag{2.56}$$

*e*

$$P_+ r^{\pm 1} P_+ = r^{\pm 1} P_+. \tag{2.57}$$

Sejam $R_d$ o conjunto de todas as matrizes racionais $r$ que satisfazem as condições (2.56) e (2.57),

$$l_1(r) = \sum_{i=1}^{n} \max_{j=\overline{1,n}} l_{i,j},$$

onde $l_{i,j}$ é o grau do polinómio $p_{i,j}$ que corresponde ao elemento $r_{i,j}$ da matriz racional $r$, e

$$l(d) = \min_{r \in R_d} \{l_1(r)\}. \tag{2.58}$$

Do Teorema 2.2 decorre:

**Teorema 2.7** *Se $c \in C^{n\times n}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ em (2.54) satisfaz a condição (2.55), então é válida a estimativa*

$$\dim \ker T \leq l(c). \tag{2.59}$$

Suponhamos agora que $c \in C^{n\times n}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ satisfaz as propriedades

$$\sigma[c(\infty)] \subset \mathbb{T}_-, \tag{2.60}$$

$$\det c(t) \neq 0, \quad \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}. \tag{2.61}$$

Desta última condição decorre que a função matricial contínua $c$ admite a factorização (1.5) em $L_2^{n\times n}(\mathbb{R})$. Suponhamos ainda que a condição (1.6) é satisfeita.

Do Teorema 2.3 obtemos:

**Teorema 2.8** *Se* $c \in C^{n\times n}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ *em (2.54) satisfaz as condições (2.60), (2.61), (1.5) e (1.6), então é válida a estimativa*

$$\dim\ker T \leq l(\widetilde{c}) + \sum_{\varkappa_j<0} |\varkappa_j|\,, \tag{2.62}$$

*onde* $l(\widetilde{c})$ *é o número definido por (2.58) para a matriz* $\widetilde{c} = c_+ c^{-1} c_+^{-1}(\alpha_{-1})$, *e* $\varkappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,n}$, *são os índices parciais da factorização (1.5) da matriz* $c$.

Os Teoremas 2.4 e 2.5 podem ser formulados de forma análoga para o operador definido por (2.54).

## 2.5 Com coeficiente polinomial relativamente ao operador de deslocamento

### 2.5.1 Na recta real

Considere-se o operador integral singular na recta real $\mathbb{R}$,

$$T = AP_+ + P_- : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \tag{2.63}$$

onde

$$A = I + \sum_{j=1}^{n} a_j(t) U^j, \tag{2.64}$$

$a_j \in C(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$, $j = \overline{1,n}$ são funções contínuas,

$$(U\varphi)(t) = \varphi(t+h), \quad h \in \mathbb{R}^+,$$

é o operador de deslocamento isométrico com o único ponto fixo no infinito.

Comecemos por definir o polinómio

$$A_\infty(\eta) = 1 + \sum_{j=1}^{n} a_j(\infty)\eta^j, \quad \eta \in \mathbb{T}. \tag{2.65}$$

A invertibilidade do operador (2.64) implica que (ver, por exemplo, [25], p. 142-145)

$$A_\infty(\eta) \neq 0, \quad \eta \in \mathbb{T}. \tag{2.66}$$

Portanto, para o índice $k(A)$ do polinómio $A_\infty(\eta)$ temos

$$0 \leq k(A) \leq n.$$

Considere-se agora o operador matricial (ver [25], [30])

$$\widetilde{T} = \widetilde{A}P_+ + P_- : L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(\mathbb{R}), \tag{2.67}$$

com

$$\widetilde{A} = I + aU, \tag{2.68}$$

onde

$$a(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-1}(t) & a_n(t) \\ & & & & \\ & & -E_{n-1} & & O_{(n-1)\times 1} \end{pmatrix}$$

e $E_n$ é a matriz identidade.

Tem lugar o seguinte resultado fundamental:

**Proposição 2.7** *Sejam $T$ e $\widetilde{T}$ os operadores definidos por (2.63) e (2.67), respectivamente. O operador $T$ é um operador de Fredholm em $L_2(\mathbb{R})$ se e só se o operador $\widetilde{T}$ é um operador de Fredholm em $L_2^n(\mathbb{R})$. Neste caso* $\dim\ker T = \dim\ker \widetilde{T}$ *e* $\dim\operatorname{coker} T = \dim\operatorname{coker} \widetilde{T}$.

**Demonstração.** Comecemos por reescrever os operadores $T$:

$$T = I + a_1UP_+ + a_2U^2P_+ + ... + a_nU^nP_+ : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),$$

e $\widetilde{T}$:

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & ... & A_n \\ A_0 & I & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_0 & I & ... & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & ... & I \end{pmatrix} : L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(\mathbb{R}),$$

onde $A_0 = -UP_+$, $A_1 = I + a_1UP_+$, $A_2 = a_2UP_+$, $A_3 = a_3UP_+$, ...,
$A_n = a_nUP_+$.

Temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & I \\ 0 & 0 & ... & I & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & I & ... & 0 & 0 \\ I & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & ... & A_n \\ A_0 & I & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_0 & I & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & I \\ 0 & 0 & ... & I & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & I & ... & 0 & 0 \\ I & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & A_0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & I & A_0 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & ... & I & A_0 \\ A_n & A_{n-1} & ... & A_2 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Vamos prosseguir multiplicando à direita o último operador pelos $(n-1)$

operadores invertíveis

$$\begin{pmatrix} I & -A_0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & I & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & ... & I & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & I & -A_0 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & ... & I & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & I \end{pmatrix}, ...,$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & I & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & ... & I & -A_0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Obtemos

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & I & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & ... & I & 0 \\ D_1 & D_2 & ... & D_{n-1} & D \end{pmatrix},$$

onde $D_1 = A_n$, $D_2 = A_{n-1} - A_n A_0$, $D_3 = A_{n-2} - A_{n-1}A_0 + A_n A_0^2$, ..., $D = A_1 - A_2 A_0 + A_3 A_0^2 + ... + (-1)^{n-1} A_n A_0^{n-1}$.

É válida a igualdade seguinte:

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & I & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & ... & I & 0 \\ D_1 & D_2 & ... & D_{n-1} & D \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & I & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & ... & I & 0 \\ D_1 & D_2 & ... & D_{n-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & I & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & ... & I & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & D \end{pmatrix}.$$

No segundo membro da igualdade anterior, o primeiro operador é invertível; o segundo operador é de Fredholm se e só se o operador $D$ é de Fredholm, e os respectivos números de defeito coincidem. Usando a propriedade $UP_+ = P_+U$, constatamos que $D \equiv T$. ■

Agora vamos definir

$$D_\infty(\eta) = E_n + a(\infty)\eta, \quad \eta \in \mathbb{T}.$$

Se a condição necessária para a invertibilidade do operador matricial (2.68) (ver [25], p. 118-120)

$$\det D_\infty(\eta) \neq 0, \quad \eta \in \mathbb{T},$$

for satisfeita, então para o índice $k(\widetilde{A})$ do polinómio $\det D_\infty(\eta)$ tem-se

$$0 \leq k(\widetilde{A}) \leq n.$$

Notemos que

$$\det D_\infty(\eta) = A_\infty(\eta). \tag{2.69}$$

Logo

$$k(\widetilde{A}) = k(A) \equiv \operatorname{ind} A_\infty.$$

Então, designando por $\lambda_i(a,\infty)$ os valores próprios da matriz $a(\infty)$, e por $\eta_i$ as raízes do polinómio $A_\infty(\eta)$, temos $\lambda_i^{-1}(a,\infty) = -\eta_i,\ i = \overline{1,n}$, tendo em conta a igualdade (2.69). Notemos ainda que $\operatorname{ind} A_\infty$ coincide com o número de raízes do polinómio $A_\infty(\eta)$ que se encontram no interior do disco unitário, ou, de forma equivalente, com o número de valores próprios da matriz $a(\infty)$ que se encontram no exterior do disco unitário.

Tendo em conta o que referimos na secção 1.5, as condições necessárias e suficientes de invertibilidade do operador (2.64), e portanto condições de Fredholm para o operador (2.63), podem ser escritas de forma simples em dois casos extremos. Escrevemos ainda o índice do operador (2.63) nestes dois casos (ver o Teorema 2, p. 149, em [25]).

**Proposição 2.8** *([25]) Sejam $T$ o operador definido por (2.63) com coeficientes $a_j \in C(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$, $j = \overline{1,n}$, $A_\infty(\eta)$ definido por (2.65) e seja satisfeita a condição (2.66).*

*São verdadeiras as seguintes asserções:*

*1. Se $\operatorname{ind} A_\infty = 0$, então o operador $T$ é de Fredholm e*

$$\operatorname{Ind} T = 0.$$

*2. Se $\operatorname{ind} A_\infty = n$ e $a_n(t) \neq 0, \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}$, então o operador $T$ é de Fredholm e*

$$\operatorname{Ind} T = \operatorname{ind} a_n^{-1}.$$

*Observação.* Se $n = 1$, então as condições das asserções 1 e 2 da Proposição 2.8 são não só suficientes mas também necessárias para a propriedade de Fredholm do operador $T$.

Consideremos então os dois casos mencionados.

**Teorema 2.9** *Sejam $T$ o operador definido por (2.63) e $A_\infty(\eta)$ definido por (2.65). Se* $\operatorname{ind} A_\infty = 0$ *e*

$$a(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-1}(t) & a_n(t) \\ & & & & \\ & & -E_{n-1} & & O_{(n-1)\times 1} \end{pmatrix},$$

*então é válida a estimativa*

$$\dim \ker T \leq l(a), \tag{2.70}$$

*onde $l(a)$ é o número definido por (2.58) para a matriz $a$.*

**Demonstração.** Uma vez que $\operatorname{ind} A_\infty = 0$, i.e., $\sigma[a(\infty)] \subset \mathbb{T}_+$, podemos aplicar o Teorema 2.7 ao operador $\widetilde{T}$ definido por (2.67). Com a Proposição 2.7, obtemos a estimativa (2.70). ■

Suponhamos agora que $a \in C^{n\times n}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ satisfaz a propriedade

$$\det a(t) \neq 0, \quad \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}\,. \tag{2.71}$$

Então a função matricial contínua $a$ admite a factorização (1.5) em $L_2^{n\times n}(\mathbb{R})$. É ainda assumido que a condição (1.6) é satisfeita.

**Teorema 2.10** *Sejam $T$ o operador definido por (2.63) e $A_\infty(\eta)$ definido por (2.65). Se* $\operatorname{ind} A_\infty = n$, *$a_n(t) \neq 0, \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}$, e as condições (2.71), (1.5) com (1.6), forem satisfeitas para a matriz $a$, então é válida a estimativa*

$$\dim \ker T \leq l(\widetilde{a}) + \sum_{\varkappa_j < 0} |\varkappa_j|\,, \tag{2.72}$$

*onde $l(\widetilde{a})$ é o número definido por (2.58) para a matriz $\widetilde{a} = a_+ a^{-1} a_+^{-1}(\alpha_{-1})$, e $\varkappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,n}$, são os índices parciais da factorização (1.5) da matriz $a$.*

**Demonstração.** Como $\operatorname{ind} A_\infty = n$, i.e., $\sigma[a(\infty)] \subset \mathbb{T}_-$, podemos aplicar o Teorema 2.8 ao operador $\widetilde{T}$ definido por (2.67). Com a Proposição 2.7, obtemos a estimativa (2.72). ∎

Se $n = 2$, a estimativa (2.72) pode ser escrita numa forma mais simples.

**Corolário 2.1** *Seja $n = 2$. Nas condições do Teorema 2.10, é válida a estimativa*

$$\dim\ker T \le l(\widetilde{a}) + \max\{0, -\operatorname{ind} a_2\}. \tag{2.73}$$

**Demonstração.** Se $n = 2$, a matriz $a$ tem a forma

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.74}$$

Temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a^T = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ a_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se $\operatorname{ind} a_2 \le 1$, então os índices parciais $\varkappa_{1,2}$ da factorização

$$a^T = b_+ \Lambda b_-,$$

são iguais a $\operatorname{ind} a_2$ e 0 (ver [35], p. 147-148). Obviamente os índices parciais da factorização

$$a = a_- \Lambda a_+,$$

são os mesmos. Logo, só são possíveis índices parciais negativos se $\operatorname{ind} a_2 < 0$. Por outro lado temos

$$a_- = b_-^T, \quad a_+ = b_+^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos a fórmula (2.73). ∎

### 2.5.2 Na circunferência unitária

As Proposições 2.7 e 2.8, os Teoremas 2.9 e 2.10, e o Corolário 2.1, podem ser formulados de forma análoga para o operador definido na circunferência unitária $\mathbb{T}$,

$$T = AP_+ + P_- : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T}), \tag{2.75}$$

onde

$$A = I + \sum_{j=1}^{n} a_j(t)V^j,$$

$a_j \in C(\mathbb{T})$, $j = \overline{1,n}$ são funções contínuas,

$$(V\varphi)(t) = \alpha_+(t)\varphi(\alpha(t)),$$

é o operador de deslocamento isométrico definido por (1.10).

# Capítulo 3

# Alguns casos particulares e aplicações

Tendo em conta as estimativas para a dimensão do núcleo dos operadores considerados no Capítulo 2, em particular a estimativa (2.73), iremos considerar dois subtipos do operador definido por (2.63). O primeiro é um operador $T$ para o qual o número $l(a^{-1})$ não desempenhará nenhum papel na correspondente estimativa para a dimensão do seu núcleo (secção 3.1). Depois consideraremos um operador $T$ para o qual indicaremos as condições de Fredholm e os seus números de defeito (secção 3.2). Deste último operador daremos exemplos de operadores $T$, mostrando que, em geral, não se pode excluir nenhum dos termos presentes nas estimativas obtidas; logo podemos concluir que as estimativas são óptimas. Consideraremos um exemplo de um operador, para o qual determinaremos explicitamente uma base do seu núcleo. Analisaremos ainda um exemplo do operador definido por (2.43) (secção 3.3).

Na secção 3.4 utilizaremos os resultados obtidos para construir uma estimativa para o número de soluções linearmente independentes de um problema de contorno de Riemann generalizado com deslocamento.

## 3.1 Um operador com coeficientes prolongáveis analiticamente no semi-plano inferior

Considere-se o operador integral singular com deslocamento

$$T_1 = \left[I + a_1 U + a_2 U^2\right] P_+ + P_- : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \tag{3.1}$$

onde $a_{1,2} \in C(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ são prolongáveis analiticamente em $\mathbb{C}_-$ (o semi-plano inferior).

Como foi referido na secção 2.5, o operador $T_1$ é de Fredholm em $L_2(\mathbb{R})$ se e só se o operador

$$A_1 = I + a_1 U + a_2 U^2$$

é continuamente invertível em $L_2(\mathbb{R})$. Com as condições impostas aos coeficientes, o operador $A_1$ satisfaz as igualdades

$$P_- A_1 P_- = A_1 P_-, \quad P_+ A_1 P_- = 0.$$

De onde decorre que

$$T_1^{(-1)} = (P_+ + A_1 P_-) A_1^{-1}$$

é um operador inverso à direita do operador $T_1$. Portanto, se o operador $T_1$ for de Fredholm, então

$$\operatorname{Ind} T_1 = \dim \ker T_1.$$

Seja

$$A_{1,\infty}(\eta) = 1 + a_1(\infty)\eta + a_2(\infty)\eta^2, \quad \eta \in \mathbb{T}, \tag{3.2}$$

e

$$A_{1,\infty}(\eta) \neq 0, \quad \eta \in \mathbb{T}. \tag{3.3}$$

Tendo em conta a Proposição 2.8, podemos escrever

**Teorema 3.1** *Sejam $T_1$ o operador definido por (3.1) com coeficientes $a_{1,2} \in C(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ prolongáveis analiticamente em $\mathbb{C}_-$, $A_{1,\infty}(\eta)$ definido por (3.2) e seja satisfeita a condição (3.3).*

*São verdadeiras as seguintes asserções:*

*1. Se $\operatorname{ind} A_{1,\infty} = 0$, então o operador $T_1$ é invertível.*

*2. Se $\operatorname{ind} A_{1,\infty} = 2$ e $a_2(t) \neq 0, \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}$, então o operador $T_1$ é invertível à direita e*

$$\dim \ker T_1 = -\operatorname{ind} a_2.$$

Considere-se de novo o caso quando $\operatorname{ind} A_{1,\infty} = 2$. Da demonstração do Corolário 2.1, como $\operatorname{ind} a_2 \leq 0$, uma vez que $a_2 \in C(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ é prolongável analiticamente em $\mathbb{C}_-$, os índices parciais da matriz (2.74) são $\varkappa_1 = \operatorname{ind} a_2$ e $\varkappa_2 = 0$. Não é difícil construir um exemplo de um operador $T_1$, satisfazendo as condições da asserção 2 do Teorema 3.1, tal que $l(\widetilde{a}) = 0$, e então teríamos a igualdade prevista na estimativa (2.73).

## 3.2 Um operador definido como um produto de operadores

Agora considere-se o operador

$$T_2 = \left[I + a_1 U + a_2 U^2\right] P_+ + P_- : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \tag{3.4}$$

onde $a_{1,2} \in C(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$, $a_1(t) = a_-(t) + a_+(t)$, $a_2(t) = a_-(t)a_+(t+h)$, $a_\pm$ são prolongáveis analiticamente em $\mathbb{C}_\pm$ (os semi-planos superior e inferior), respectivamente.

Seja

$$A_2 = I + (a_-(t) + a_+(t))U + a_-(t)a_+(t+h)U^2$$

e

$$A_{2,\infty}(\eta) = 1 + (\nu_1 + \nu_2)\eta + \nu_1\nu_2\eta^2, \quad \eta \in \mathbb{T}, \tag{3.5}$$

onde $\nu_1 \equiv a_-(\infty)$, $\nu_2 \equiv a_+(\infty)$.
A invertibilidade do operador $A_2$ implica que

$$A_{2,\infty}(\eta) \neq 0, \quad \eta \in \mathbb{T}. \tag{3.6}$$

Enão $|\eta_{1,2}| \neq 1$, onde $\eta_{1,2}$ são as raízes do polinómio $A_{2,\infty}(\eta)$. Note-se que

$$\eta_{1,2} = -\frac{1}{\nu_{1,2}}. \tag{3.7}$$

O operador $T_2$ pode ser escrito como o produto de operadores

$$T_2 = T_{2,1}.T_{2,2}, \tag{3.8}$$

onde

$$T_{2,1} = A_{2,1}P_+ + P_-, \quad T_{2,2} = A_{2,2}P_+ + P_-, \tag{3.9}$$

e

$$A_{2,1} = I + a_-U, \quad A_{2,2} = I + a_+U.$$

Tendo em conta a observação depois da Proposição 2.8, e as igualdades (3.8), (3.7), considerando condições impostas aos coeficientes $a_\pm$ similares àquelas impostas ao coeficiente $a_1$ do operador $T$ com $n = 1$, dependendo do valor de $\operatorname{ind} A_{2,\infty}$, decorre que o operator $T_2$ é de Fredholm se e só se $\operatorname{ind} A_{2,\infty} = k$, $0 \leq k \leq 2$.

Utilizando a igualdade (3.8), analisemos mais detalhadamente o operador $T_2$.

O operador $T_{2,1}$ é invertível quando $|\nu_1| < 1$, e é invertível à direita quando $|\nu_1| > 1$.

O operador $T_{2,2}$ é invertível quando $|\nu_2| < 1$, e é invertível à esquerda quando $|\nu_2| > 1$.

Temos

$$\operatorname{Ind} T_2 = \operatorname{Ind} T_{2,1} + \operatorname{Ind} T_{2,2} = \dim\ker T_{2,1} - \dim\operatorname{coker} T_{2,2}.$$

Denotando

$$\operatorname{ind} a_- \equiv -\gamma_1, \quad \operatorname{ind} a_+ \equiv \gamma_2, \quad \gamma_{1,2} \geq 0,$$

podemos escrever

$$\operatorname{Ind} T_2 = 0, \text{ quando } |\nu_{1,2}| < 1, \ (\operatorname{Ind} A_{2,\infty} = 0),$$

$$\operatorname{Ind} T_2 = -\gamma_2, \text{ quando } |\nu_1| < 1, \ |\nu_2| > 1, \ (\operatorname{ind} A_{2,\infty} = 1),$$

$$\operatorname{Ind} T_2 = \gamma_1, \text{ quando } |\nu_1| > 1, \ |\nu_2| < 1, \ (\operatorname{ind} A_{2,\infty} = 1),$$

$$\operatorname{Ind} T_2 = \gamma_1 - \gamma_2, \text{ quando } |\nu_{1,2}| > 1, \ (\operatorname{ind} A_{2,\infty} = 2).$$

Além disso, pode-se mostrar que se verificam as seguintes igualdades:

$$\dim\ker T_2 = 0, \text{ quando } |\nu_{1,2}| < 1 \text{ ou } |\nu_1| < 1, \ |\nu_2| > 1. \tag{3.10}$$

$$\dim\ker T_2 = \gamma_1, \text{ quando } |\nu_1| > 1, \ |\nu_2| < 1 \text{ ou } |\nu_{1,2}| > 1. \tag{3.11}$$

A igualdade (3.10) é óbvia. Para demonstrar a igualdade (3.11), tem-se em conta que:

- O operador $T_{2,1}$ é invertível à direita e $T_{2,1}^{(-1)} = (P_+ + A_{2,1}P_-)A_{2,1}^{-1}$ é um operador inverso à direita do operador $T_{2,1}$, e

- Como o operador $T_{2,2}$ é invertível à esquerda, $\dim\ker T_{2,2} = 0$.

Consideremos o projector no núcleo do operador $T_{2,1}$,

$$\Pi = I - T_{2,1}^{(-1)}T_{2,1} = -(I - A_{2,1})P_+A_{2,1}^{-1}P_-.$$

Constata-se que

$$\Pi T_{2,2} = \Pi.$$

Portanto $\Pi$ é também um projector no núcleo do operador $T_2$.
Logo

$$\dim\ker T_2 = \dim\ker T_{2,1} = \gamma_1.$$

Reunimos os resultados sobre o operador $T_2$ no Teorema seguinte:

**Teorema 3.2** *Sejam $T_2$ o operador definido por (3.4) com coeficientes $a_{1,2} \in C(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$, $a_1(t) = a_-(t) + a_+(t)$, $a_2(t) = a_-(t)a_+(t+h)$, $a_\pm$ com prolongamento analítico em $\mathbb{C}_\pm$, respectivamente, $A_{2,\infty}(\eta)$ definido por (3.5) e seja satisfeita a condição (3.6).*

*O operador $T_2$ é de Fredholm se e só se for satisfeita uma das seguintes condições:*

*1.* $\operatorname{ind} A_{2,\infty} = 0$. *Além disso, o operador $T_2$ é invertível.*

*2.* $\operatorname{ind} A_{2,\infty} = 1$ *com*

*(a)* $|a_-(\infty)| < 1$, $|a_+(\infty)| > 1$ *e* $a_+(t) \neq 0, \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}$. *Além disso, o operador $T_2$ é invertível à esquerda e*

$$\dim\operatorname{coker} T_2 = \operatorname{ind} a_+.$$

*(b)* $|a_-(\infty)| > 1$, $|a_+(\infty)| < 1$ *e* $a_-(t) \neq 0, \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}$. *Além disso, o operador* $T_2$ *é invertível à direita e*

$$\dim \ker T_2 = -\operatorname{ind} a_-.$$

*3.* $\operatorname{ind} A_{2,\infty} = 2$ *e* $a_\pm(t) \neq 0, \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}$. *Além disso,*

$$\dim \ker T_2 = -\operatorname{ind} a_- \quad e \quad \dim \operatorname{coker} T_2 = \operatorname{ind} a_+.$$

## 3.3 Exemplos

Nesta secção vamos aplicar a estimativa (2.73) a dois exemplos concretos do operador $T_2$ estudado na secção anterior. Daremos um exemplo de um operador para o qual determinaremos uma base do seu núcleo. Iremos ainda analisar um exemplo do operador definido por (2.43).

*Exemplo 1.* Seja

$$a_-(t) = 2\frac{t+i}{t-i}, \quad a_+(t) = 2\frac{t-i}{t+i}, \quad (U\varphi)(t) = \varphi(t+1).$$

Pelo Teorema 3.2 temos

$$\dim \ker T_2 = 1.$$

A matriz

$$a(t) = \begin{pmatrix} a_-(t) + a_+(t) & a_-(t)a_+(t+1) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\frac{t+i}{t-i} + 2\frac{t-i}{t+i} & 4\frac{t+i}{t-i}\frac{t+1-i}{t+1+i} \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

admite a factorização

$$a(t) = a_-(t)\Lambda(t)a_+(t),$$

onde

$$a_-(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-44-8i}{25}\dfrac{t+i}{t-i} & 1-\dfrac{1+2i}{5}\dfrac{t+i}{t-i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_+(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2+4i}{5}+2\dfrac{t-i}{t+i} & \dfrac{4-8i}{-1-2i+\dfrac{t-i}{t+i}} \end{pmatrix}.$$

Comprova-se que

$$\rho[a^{-1}(\infty)] < 1, \text{ mas, } \max_{t\in\overset{\circ}{\mathbb{R}}} \rho[a^{-1}(t)] > 1.$$

Seja

$$r(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t+2+3i}{t+i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então tem-se

$$\max_{t\in\overset{\circ}{\mathbb{R}}} \rho[r(t)\widetilde{a}(t)r^{-1}(t+1)] < 1.$$

Logo $l(\widetilde{a}) = 1$.

Agora apliquemos a estimativa (2.73) ao operador $T_2$; obtemos

$$\dim\ker T_2 \leq 1 + 0.$$

Ou seja

$$1 = \dim\ker T_2 \leq 1.$$

*Exemplo 2.* Seja agora

$$a_-(t) = 2\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^2, \quad a_+(t) = 2\frac{t-i}{t+i}, \quad (U\varphi)(t) = \varphi(t+1).$$

Neste caso

$$\dim\ker T_2 = 2.$$

A matriz

$$a(t) = \begin{pmatrix} a_-(t)+a_+(t) & a_-(t)a_+(t+1) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\left(\dfrac{t+i}{t-i}\right)^2 + 2\dfrac{t-i}{t+i} & 4\left(\dfrac{t+i}{t-i}\right)^2 \dfrac{t+1-i}{t+1+i} \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

admite a factorização

$$a(t) = a_-(t)\Lambda(t)a_+(t),$$

onde

$$a_-(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-228+4i}{125}\left(\dfrac{t+i}{t-i}\right)^2 & 1 - \dfrac{1+2i}{5}\dfrac{t+i}{t-i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$a_+(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{-6+8i}{25} + \dfrac{2+4i}{5}\dfrac{t-i}{t+i} + 2\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)^2 & \dfrac{4-8i}{-1-2i+\dfrac{t-i}{t+i}} \end{pmatrix}.$$

Verifica-se que

$$\rho[a^{-1}(\infty)] < 1, \text{ mas, } \max_{t\in\overset{\circ}{\mathbb{R}}} \rho[a^{-1}(t)] > 1.$$

Como no exemplo anterior, seja

$$r(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t+2+3i}{t+i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então tem-se

$$\max_{t\in\overset{\circ}{\mathbb{R}}} \rho[r(t)\widetilde{a}(t)r^{-1}(t+1)] < 1.$$

Logo $l(\widetilde{a}) = 1$.

Aplicando a estimativa (2.73) ao operador $T_2$ obtem-se

$$\dim\ker T_2 \leq 1 + 1.$$

Ou seja

$$2 = \dim\ker T_2 \leq 2.$$

*Exemplo 3.* Considere-se o operador

$$T_3 = A_3P_+ + P_- : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \tag{3.12}$$

onde

$$A_3 = I - \mu\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k U, \tag{3.13}$$

com $k > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| \neq 1$.

Este operador é um exemplo do operador $T_{2,1}$ definido em (3.9); como tal temos (ver a secção 3.2):

1. O operador $T_3$ é invertível quando $|\mu| < 1$; um operador inverso do operador $T_3$ é $T_3^{(-1)} = (P_+ + A_3P_-)A_3^{-1}$, onde, neste caso,

$$\begin{aligned} A_3^{-1} &= \sum_{m=0}^{\infty}\left[\mu\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k U\right]^m \\ &= I + \mu\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k U + \mu^2\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k\left(\frac{t+h+i}{t+h-i}\right)^k U^2 + ..., \end{aligned}$$

pois

$$\left\|\mu\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k U\right\| \leq |\mu| \left\|\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k\right\| \|U\| = |\mu| < 1.$$

2. O operador $T_3$ é invertível à direita quando $|\mu| > 1$; um operador inverso à direita do operador $T_3$ é, evidentemente, $T_3^{(-1)} = (P_+ + A_3 P_-)A_3^{-1}$. Calculemos $A_3^{-1}$; de

$$\begin{aligned} A_3 &= I - \mu\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k U \\ &= -\mu\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k \left[I - \frac{1}{\mu}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k U^{-1}\right] U, \end{aligned}$$

temos

$$A_3^{-1} = -\frac{1}{\mu}U^{-1}\left[I - \frac{1}{\mu}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k U^{-1}\right]^{-1} \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k .I.$$

Como

$$\left\|\frac{1}{\mu}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k U^{-1}\right\| \leq \left|\frac{1}{\mu}\right| \left\|\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k\right\| \|U^{-1}\| = \left|\frac{1}{\mu}\right| < 1,$$

usando a correspondente série de Neumann, podemos escrever

$$A_3^{-1} = -\frac{1}{\mu}U^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k U^{-1}\right]^m \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k .I$$

$$\begin{aligned} = \ & -\frac{1}{\mu}U^{-1}\left\{I + \frac{1}{\mu}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k U^{-1} + \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k \left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k U^{-2} + ... + \right. \\ & + \frac{1}{\mu^m}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k \left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k ... \\ & \left. ... \left(\frac{t-(m-1)h-i}{t-(m-1)h+i}\right)^k U^{-m} + ... \right\} \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k .I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & -\frac{1}{\mu}U^{-1}\left\{\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k + \frac{1}{\mu}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k U^{-1} + \right. \\
& +\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k\left(\frac{t-2h-i}{t-2h+i}\right)^k U^{-2} + \dots + \\
& +\frac{1}{\mu^m}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k \dots \\
& \left. \dots\left(\frac{t-(m-1)h-i}{t-(m-1)h+i}\right)^k\left(\frac{t-mh-i}{t-mh+i}\right)^k U^{-m} + \dots\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & -\left\{\frac{1}{\mu}\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k U^{-1} + \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k\left(\frac{t-2h-i}{t-2h+i}\right)^k U^{-2} + \dots + \right. \\
& +\frac{1}{\mu^{m+1}}\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k\left(\frac{t-2h-i}{t-2h+i}\right)^k \dots \\
& \left. \dots\left(\frac{t-mh-i}{t-mh+i}\right)^k\left(\frac{t-(m+1)h-i}{t-(m+1)h+i}\right)^k U^{-(m+1)} + \dots\right\}.
\end{aligned}$$

Obtemos

$$A_3^{-1} =$$
$$= -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{m+1}}\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k\left(\frac{t-2h-i}{t-2h+i}\right)^k \dots \left(\frac{t-(m+1)h-i}{t-(m+1)h+i}\right)^k U^{-(m+1)}. \tag{3.14}$$

3. Um projector no núcleo do operador $T_3$ é

$$\Pi = I - T_3^{(-1)}T_3 = -(I - A_3)P_+A_3^{-1}P_-.$$

4. A dimensão do núcleo do operador $T_3$ (com $|\mu| > 1$) é $k$. Vamos construir uma base no subespaço $\ker T_3$. Considere-se a seguinte família de funções de $L_2(\mathbb{R})$, com prolongamento analítico em $D_-$:

$$\varphi_l = \frac{1}{(t-i)^l}, \quad l = \overline{1,k}.$$

Calculemos

$$\Pi\varphi_l = \left\{-(I - A_3)P_+A_3^{-1}P_-\right\}\left\{\frac{1}{(t-i)^l}\right\}.$$

Com (3.13) e (3.14) temos

$$\begin{aligned}
\Pi\varphi_l &= -\mu\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k UP_+\left\{-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{m+1}}\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k\left(\frac{t-2h-i}{t-2h+i}\right)^k\ldots\right.\\
&\qquad\left.\ldots\left(\frac{t-(m+1)h-i}{t-(m+1)h+i}\right)^k U^{-(m+1)}\right\}\left\{\frac{1}{(t-i)^l}\right\}\\
&= \mu\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k UP_+\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{m+1}}\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k\left(\frac{t-2h-i}{t-2h+i}\right)^k\ldots\right.\\
&\qquad\left.\ldots\left(\frac{t-(m+1)h-i}{t-(m+1)h+i}\right)^k\frac{1}{(t-(m+1)h-i)^l}\right\}\\
&= \mu\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k U\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{m+1}}\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k\left(\frac{t-2h-i}{t-2h+i}\right)^k\ldots\right.\\
&\qquad\left.\ldots\left(\frac{t-(m+1)h-i}{t-(m+1)h+i}\right)^k\frac{1}{(t-(m+1)h-i)^l}\right\},
\end{aligned}$$

porque as funções situadas dentro do somatório são prolongáveis analiticamente em $D_+$. Prosseguimos

$$\begin{aligned}
\Pi\varphi_l &= \mu\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{m+1}}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k\ldots\right.\\
&\qquad\left.\ldots\left(\frac{t-mh-i}{t-mh+i}\right)^k\frac{1}{(t-mh-i)^l}\right\}\\
&= \left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^m}\left(\frac{t-h-i}{t-h+i}\right)^k\ldots\left(\frac{t-mh-i}{t-mh+i}\right)^k\frac{1}{(t-mh-i)^l}\right\}+\frac{1}{(t-i)^l}.
\end{aligned}$$

As funções obtidas

$$\Pi\varphi_l\in\ker T_3,\quad l=\overline{1,k},$$

são linearmente independentes: as funções situadas dentro do somatório são prolongáveis analiticamente em $\mathbb{C}_+$ e as funções $\dfrac{1}{(t-i)^l}$, $l=\overline{1,k}$, são prolongáveis analiticamente em $\mathbb{C}_-$ e formam um sistema de funções linearmente independentes; logo as funções $\Pi\varphi_l$ constituem uma base do núcleo do operador $T_3$.

5. Ilustremos as estimativas (2.70) e (2.72), para $n = 1$, aplicando-as ao operador $T_3$, com $|\mu| < 1$ e $|\mu| > 1$, respectivamente. Vamos reescrever o operador $T_3$:

$$T_3 = I + aUP_+,$$

onde $a(t) = -\mu \left(\dfrac{t+i}{t-i}\right)^k$, $k > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| \neq 1$.

(a) Seja $|\mu| < 1$. Temos

$$|a(t)| = \left|\mu \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^k\right| = |\mu| < 1, \quad \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}\ .$$

Logo, tendo em conta o Teorema 2.9, $r = 1$ e $l(a) = 0$, e portanto

$$0 = \dim\ker T_3 \leq 0.$$

(b) Seja agora $|\mu| > 1$. Temos

$$\left|a^{-1}(t)\right| = \left|\mu^{-1} \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k\right| = \left|\mu^{-1}\right| < 1, \quad \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}\ .$$

Então, tendo em conta o Teorema 2.10, $r = 1$ e $l(\widetilde{a}) = 0$.

Por outro lado, o índice da factorização (1.5) da função $a(t)$ é $-k$.

Logo

$$k = \dim\ker T_3 \leq k.$$

*Exemplo 4.* Considere-se em $L_2(\mathbb{R})$ os operadores

$$\begin{aligned} T_4 &= I - 2\frac{t+i}{t-i}U^2 P_+, \\ T_5 &= I - 2\frac{t+2i}{t-2i}U^2 P_+, \end{aligned}$$

onde $(U\varphi)(t) = \varphi(t+1)$.

A dimensão do núcleo de cada um destes operadores é 1; a estimativa (2.72) aplicada a estes operadores dá-nos o mesmo valor (ver o exemplo 3, ponto 5(b)). Deste modo

$$1 = \dim\ker T_4 \leq 1, \quad 1 = \dim\ker T_5 \leq 1. \tag{3.15}$$

Seja agora $T_6$ o operador definido em $L_2^4(\mathbb{R})$

$$T_6 = I - cUP_+,$$

onde $c$ é a matriz

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{t-1+i}{t+2i}, \quad c_2(t) = \frac{t-1+2i}{t+3i}, \\ c_3(t) &= 2\frac{t+1+3i}{t-2i}, \quad c_4(t) = 2\frac{t+1+2i}{t-i}. \end{aligned}$$

A igualdade (2.52) permite-nos escrever

$$\begin{aligned} \dim\ker T_6 &= \dim\ker(I - c_4c_1(t+1)U^2P_+) + \dim\ker(I - c_3c_2(t+1)U^2P_+) \\ &= \dim\ker T_4 + \dim\ker T_5 = 2. \end{aligned}$$

Com (3.15) e o Teorema 2.6 obtemos

$$2 = \dim\ker T_6 \leq 2.$$

## 3.4 Um problema de contorno de Riemann generalizado com deslocamento

Este tipo de problemas têm sido estudados nos últimos cinquenta anos. Particularmente nos anos sessenta e setenta a teoria deste tipo de problemas de contorno foi intensamente desenvolvida, aparentemente estimulada pelos livros [43] e [42], publicados em 1950 e 1959, respectivamente, e onde são considerados problemas de contorno com deslocamento e suas aplicações à mecânica dos meios contínuos (ver o Prefácio). No livro de I. Vekua [42], em particular, é mostrado que o problema da rigidez de uma superfície fechada formada por duas partes coladas, dependendo de condições adicionais, é reduzido ao problema de contorno (3.16) definido abaixo, com $a = c = 0$, e num contorno fechado (ver [42], p. 363-366; ver também [34], p. 173-175). No livro de N. Vekua [43], é considerado um problema da teoria da elasticidade para corpos anisotrópicos. O número de soluções linearmente independentes deste problema é majorado pelo número de soluções linearmente independentes do problema (3.16), também com $a = c = 0$ e num contorno fechado (ver [43], p. 361-371; ver também [34], p. 340-341).

Como foi referido no Prefácio, foi construída a teoria de Fredholm para problemas de contorno com deslocamento (de Carleman e não Carlemaneano) [25]. Mas as questões mais finas e precisas (e interessantes do ponto de vista das aplicações) sobre a solubilidade de problemas de contorno com deslocamento só foram consideradas sob condições muito restritivas para os respectivos coeficientes [33]. Recentemente o desenvolvimento com sucesso da teoria dos operadores integrais singulares com deslocamento linear fraccionário de Carleman e conjugação (ver, por exemplo, [9], [20], [21], [22], [23] e [24]) torna possível a construção da teoria da solubilidade para os problemas de contorno relacionados (ver [34]). Contudo mantém-se aberta a questão sobre a solubilidade dos problemas de contorno com deslocamento não Carlemaneano. Nesta secção é construída uma estimativa para o número de soluções linearmente independentes de um problema de Riemann generalizado com deslocamento não Carlemaneano.

No que se segue, $\widetilde{L}_2^m(\mathbb{R})$ designará o espaço linear real correspondente a $L_2^m(\mathbb{R})$, $m = 1, 2, 3$. Em $\widetilde{L}_2(\mathbb{R})$ vamos considerar o seguinte problema de contorno: determinar as funções $\varphi_+(z)$ e $\varphi_-(z)$, analíticas em $\mathbb{C}_+$ e $\mathbb{C}_-$, respectivamente, que satisfazem a condição imposta nos seus pontos fronteira, i. e., em $\mathbb{R}$,

$$\varphi_+ = a\varphi_- + b\varphi_-(\alpha) + c\overline{\varphi_-} + d\overline{\varphi_-(\alpha)}, \quad \varphi_-(\infty) = 0. \tag{3.16}$$

Em (3.16)

$$\alpha(t) = t + h, \quad h \in \mathbb{R}^+,$$

e $a, b, c, d \in C(\mathring{\mathbb{R}})$.

Tal como anteriormente, $U : \widetilde{L}_2(\mathbb{R}) \to \widetilde{L}_2(\mathbb{R})$ é o operador de deslocamento isométrico

$$(U\varphi)(t) = \varphi(t + h).$$

Considere-se também o operador de conjugação complexa $C$,

$$(C\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)},$$

que goza das propriedades:

1. O operador $C$ é limitado e antilinear em $L_2(\mathbb{R})$. O operador $C$ é limitado e linear em $\widetilde{L}_2(\mathbb{R})$.

2. O operador $C$ é involutivo, i. e.,

$$C^2 = I. \tag{3.17}$$

Os operadores $U$ e $C$ gozam das propriedades:

$$CU = UC, \tag{3.18}$$

$$UP_\pm = P_\pm U, \tag{3.19}$$

$$CP_\pm = P_\mp C, \tag{3.20}$$

onde $P_\pm : \widetilde{L}_2(\mathbb{R}) \to \widetilde{L}_2(\mathbb{R})$ são os operadores de projecção complementares definidos por (1.2) (com $S : \widetilde{L}_2(\mathbb{R}) \to \widetilde{L}_2(\mathbb{R})$ o operador de integração singular definido por (1.1))

Considere-se o operador emparelhado

$$K_1 = -P_+ + (aI + bU + cC + dUC)P_-.$$

O problema de contorno, com a condição fronteira (3.16), é equivalente ao problema de determinar o núcleo do operador $K_1$; assim temos

$$n = \dim \ker K_1, \tag{3.21}$$

onde $n$ é o número de soluções linearmente independentes do problema de contorno (3.16).

**Proposição 3.1** *Seja* $K_2 : \widetilde{L}_2^2(\mathbb{R}) \to \widetilde{L}_2^2(\mathbb{R})$ *o operador emparelhado com deslocamento*

$$K_2 = (M_1 I + M_2 U)P_+ + (M_3 I + M_4 U)P_-, \tag{3.22}$$

*onde* $M_j$*,* $j = \overline{1,4}$*, são as funções matriciais*

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & \overline{b} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \overline{c} & -1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ \overline{d} & 0 \end{pmatrix};$$

*então é válida a igualdade*

$$n = \frac{1}{2} \dim \ker K_2. \tag{3.23}$$

**Demonstração.** É sabido que (ver, por exemplo, [34]), das propriedades (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20) decorre a igualdade

$$N_1 \mathrm{diag}\,(K_1, \widetilde{K}_1) N_1^{-1} = K_2,$$

entre os operadores $K_2$, $K_1$ e o seu operador associado

$$\widetilde{K}_1 = -P_+ + (aI + bU - cC - dUC)P_-,$$

onde $N_1$ é o operador invertível em $\widetilde{L}_2^2(\mathbb{R})$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ C & -C \end{pmatrix}.$$

Então temos

$$\dim \ker K_1 + \dim \ker \widetilde{K}_1 = \dim \ker K_2. \tag{3.24}$$

Por outro lado os operadores $K_1$ e $\widetilde{K}_1$ são semelhantes,

$$(iI)^{-1} K_1 (iI) = \widetilde{K}_1,$$

de onde tem-se

$$\dim \ker K_1 = \dim \ker \widetilde{K}_1.$$

Com (3.21) e (3.24) obtem-se (3.23). ■

Analisemos mais detalhadamente o caso quando $b \equiv 0$.

Se a função $a \in C(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ satisfaz a propriedade

$$a(t) \neq 0, \quad \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}, \tag{3.25}$$

os coeficientes do operador emparelhado $K_2$, definido por (3.22), i. e., os operadores funcionais

$$M_1 I + M_2 U, \quad M_3 I + M_4 U,$$

são invertíveis, e portanto o operador $K_2$ é de Fredholm em $\widetilde{L}_2^2(\mathbb{R})$ (ver a secção 1.5).

Seja

$$\widetilde{K}_2 = (M_3 I + M_4 U)^{-1} K_2, \tag{3.26}$$

onde

$$(M_3 I + M_4 U)^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ \overline{c}a^{-1} & -1 \end{pmatrix} I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overline{d}a^{-1}(\alpha) & 0 \end{pmatrix} U;$$

então

$$\widetilde{K}_2 = (A_0 I + A_1 U + A_2 U^2) P_+ + P_-,$$

onde

$$A_0 = \begin{pmatrix} -a^{-1} & a^{-1}c \\ -a^{-1}\overline{c} & |c|^2 a^{-1} - \overline{a} \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & da^{-1} \\ -\overline{d}a^{-1}(\alpha) & \overline{c}da^{-1} + \overline{d}a^{-1}(\alpha)c(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix},$$

$$f = a^{-1}(\alpha)\overline{d}d(\alpha). \tag{3.29}$$

Tendo em conta (3.26) e (3.23) temos

$$n = \frac{1}{2}\dim\ker \widetilde{K}_2. \tag{3.30}$$

**Proposição 3.2** *Seja* $K_3 : \widetilde{L}_2^3(\mathbb{R}) \to \widetilde{L}_2^3(\mathbb{R})$ *o operador emparelhado*

$$K_3 = (B_0 I + B_1 U)P_+ + P_-, \tag{3.31}$$

*onde* $B_0$ *e* $B_1$ *são as funções matriciais*

$$B_0 = \begin{pmatrix} A_0 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & & f \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

*e* $A_0$, $A_1$ *e* $f$ *são definidas por (3.27), (3.28) e (3.29), respectivamente; então é válida a igualdade*

$$n = \frac{1}{2}\dim\ker K_3.$$

**Demonstração.** Designemos por $N$ o operador invertível em $\widetilde{L}_2^3(\mathbb{R})$

$$N = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & UP_+ & I \end{pmatrix};$$

facilmente se verifica que

$$K_3 N = \begin{pmatrix} \widetilde{K}_2 & & 0 \\ & & fUP_+ \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

onde $\widetilde{K}_2$ é o operador definido por (3.26). Com (3.30) decorre imediatamente a asserção da Proposição. ■

Como sabemos, se $A_0 \in C^{2\times 2}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ satisfaz a propriedade

$$\det A_0(t) \neq 0, \quad \forall t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}},$$

então a função matricial contínua $A_0$ admite a factorização (1.5) em $L_2^{2\times 2}(\mathbb{R})$ que, por conveniência, aqui lembramos

$$A_0 = A_- \Lambda A_+, \tag{3.33}$$

onde

$$(t-i)^{-1} A_-^{\pm 1} \in \left[\widehat{L}_2^-(\mathbb{R})\right]^{2\times 2}, \quad (t+i)^{-1} A_+^{\pm 1} \in \left[\widehat{L}_2^+(\mathbb{R})\right]^{2\times 2},$$

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\theta^{\varkappa_1}, \theta^{\varkappa_2}), \quad \theta(t) = \frac{t-i}{t+i};$$

$\varkappa_{1,2} \in \mathbb{Z}$ são os índices parciais da factorização com $\varkappa_1 \geq \varkappa_2$. Além disso é suposto que a condição (1.6) é satisfeita.

**Proposição 3.3** *Seja $a \in C(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ uma função escalar que satisfaz a propriedade (3.25) e*

$$a = a_- \theta^{k_a} a_+, \quad k_a = \operatorname{ind} a,$$

*uma factorização de $a$ em $L_2(\mathbb{R})$; então os índices parciais da factorização da função matricial $A_0$ definida por (3.27) são*

$$\varkappa_1 = -k_a + k, \quad \varkappa_2 = -k_a - k, \tag{3.34}$$

*onde $k$ é a dimensão do núcleo do operador*

$$I - P_- u_- P_+ \overline{u_-} P_-,$$

*e $u_- = P_- u$, $u = c_-(\overline{a_-} a_+)^{-1}$, $c_- = P_- c$.*

**Demonstração.** A função $A_0$ pode ser escrita como o produto

$$A_0 = \theta^{-k_a} B_- M B_+,$$

onde

$$B_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \overline{c_+} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_-^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{a_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \overline{u_+} & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_+ = \begin{pmatrix} 1 & u_+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{a_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & c_+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & u_- \\ \overline{u_-} & |u_-|^2 - 1 \end{pmatrix},$$

e $c_\pm = P_\pm c$, $u_\pm = P_\pm u$.

Então para construir a factorização da função matricial $A_0$ em $L_2^{2\times 2}(\mathbb{R})$, é necessário factorizar o factor central $M$. É sabido que a função matricial hermitiana $M$ admite a factorização seguinte em $L_2^{2\times 2}(\mathbb{R})$ (ver, por exemplo, [34], p. 157-158, [35], p. 289, ver também [5] e [6])

$$M = M_- \operatorname{diag}(\theta^k, \theta^{-k}) M_+,$$

onde $k$ é a dimensão do núcleo do operador

$$I - P_- u_- P_+ \overline{u_-} P_-, \tag{3.35}$$

ou seja, $k$ é a multiplicidade de 1 como valor próprio do operador autoadjunto

$$P_- u_- P_+ \overline{u_-} P_-.$$

A última igualdade significa que

$$A_0 = B_- M_- \operatorname{diag}(\theta^{-k_a + k}, \theta^{-k_a - k}) M_+ B_+,$$

é uma factorização da função matricial $A_0$ em $L_2^{2\times 2}(\mathbb{R})$, e os números inteiros definidos por (3.34) são os seus índices parciais. ■

Deve ser sublinhado que, no caso da função matricial $M$ admitir uma factorização canónica ($k = 0$) em $L_2^{2\times 2}(\mathbb{R})$, um algoritmo para calcular os factores externos $M_\pm$ é proposto em [5].

Agora vamos introduzir algumas notações:

$$\varkappa_j = \varkappa_j^+ + \varkappa_j^-, \quad j = 1, 2,$$

onde

$$\varkappa_j^\pm = \frac{1}{2}(\varkappa_j \pm |\varkappa_j|), \tag{3.36}$$

respectivamente; então o factor central da factorização (3.33) da função matricial $A_0$ pode ser escrito na forma

$$\Lambda = \Lambda_- \Lambda_+, \quad \Lambda_\pm = \operatorname{diag}(\theta^{\varkappa_1^\pm}, \theta^{\varkappa_2^\pm}), \tag{3.37}$$

respectivamente.

**Proposição 3.4** *Sejam $a \in C(\mathring{\mathbb{R}})$ uma função escalar que satisfaz a propriedade (3.25), $B_1$ a função matricial definida em (3.32), $A_\pm$ e $\varkappa_{1,2}$ os factores externos e os índices parciais, respectivamente, da factorização em $L_2^{2\times 2}(\mathbb{R})$ da função matricial $A_0$ definida por (3.27). Então*

$$n \leq \frac{1}{2}(\dim\ker K - 2\varkappa_1^- - 2\varkappa_2^-), \tag{3.38}$$

*onde $K : \widetilde{L}_2^3(\mathbb{R}) \to \widetilde{L}_2^3(\mathbb{R})$ é o operador emparelhado*

$$K = (I + AU)P_+ + P_-, \tag{3.39}$$

*$A$ é a função matricial*

$$A = \operatorname{diag}(\Lambda_-^{-1}A_-^{-1}, 1)B_1\operatorname{diag}(A_+^{-1}(\alpha)\Lambda_+^{-1}(\alpha), 1), \tag{3.40}$$

*$\Lambda_\pm$ são definidos por (3.37) e $\varkappa_{1,2}^-$ são definidos por (3.36).*

**Demonstração.** O operador $K_3$ definido por (3.31) admite a factorização seguinte

$$K_3 = \operatorname{diag}(A_-, 1)K_\Lambda[\operatorname{diag}(A_+, 1)P_+ + \operatorname{diag}(A_-^{-1}, 1)P_-], \tag{3.41}$$

onde

$$K_\Lambda = \left[\operatorname{diag}(\Lambda, 1)I + \widetilde{A}U\right]P_+ + P_-,$$

e

$$\widetilde{A} = \operatorname{diag}(A_-^{-1}, 1)B_1\operatorname{diag}(A_+^{-1}(\alpha), 1).$$

Têm lugar as igualdades

$$K_\Lambda K_- = \operatorname{diag}(\Lambda_-, 1)\widetilde{K}, \tag{3.42}$$

$$\widetilde{K} = KK_+, \tag{3.43}$$

onde

$$K_- = P_+ + \operatorname{diag}(\Lambda_-, 1)P_-, \quad K_+ = \operatorname{diag}(\Lambda_+, 1)P_+ + P_-,$$

$$\widetilde{K} = \left[\operatorname{diag}(\Lambda_+, 1)I + \operatorname{diag}(\Lambda_-^{-1}, 1)\widetilde{A}U\right]P_+ + P_-,$$

e $K$ é o operador (3.39).

Retomemos à igualdade (3.42). O operador $\operatorname{diag}(\Lambda_-, 1)$ é obviamente invertível. O operador $K_-$ é invertível à esquerda: tem-se $\dim\ker K_- = 0$ e $\dim\operatorname{coker} K_- = -\varkappa_1^- - \varkappa_2^-$ em $L_2^3(\mathbb{R})$ (ver, por exemplo, [40]). Em $\widetilde{L}_2^3(\mathbb{R})$ tem-se

$$\dim\operatorname{coker} K_- = -2\varkappa_1^- - 2\varkappa_2^-. \tag{3.44}$$

Então de (3.42) pode-se concluir que

$$\dim\ker K_\Lambda \leq \dim\ker \widetilde{K} + \dim\operatorname{coker} K_-. \tag{3.45}$$

O operador $K_+$ também é invertível à esquerda; de (3.43) obtemos

$$\dim\ker \widetilde{K} \leq \dim\ker K. \tag{3.46}$$

Os factores externos na factorização (3.41) são operadores invertíveis; tendo em conta a Proposição 3.2, temos

$$n = \frac{1}{2}\dim\ker K_\Lambda.$$

Com as desigualdades (3.45) e (3.46) obtemos

$$n \leq \frac{1}{2}(\dim\ker K + \dim\operatorname{coker} K_-).$$

Daqui, com (3.44), decorre a asserção da Proposição. ■

Agora vamos utilizar o limite superior (2.59) proposto no Teorema 2.7 para afinar a estimativa para o número de soluções linearmente independentes do problema de contorno (3.16); tendo em atenção que o operador $K$ aqui considerado é definido em $\widetilde{L}_2^3(\mathbb{R})$, podemos escrever:

**Proposição 3.5** *Sejam $K$ o operador definido por (3.39) e $a \in C(\mathring{\mathbb{R}})$ uma função escalar que satisfaz a propriedade (3.25). Então é válida a estimativa*

$$\dim\ker K \leq 2l(A), \tag{3.47}$$

*onde $l(A)$ é o número definido por (2.58) para a matriz $A$.*

**Demonstração.** Tendo em conta o Teorema 2.7, basta demonstrar que a função matricial (3.40) satisfaz a condição

$$\sigma[A(\infty)] \subset \mathbb{T}_+.$$

De facto, se $A_\pm$ são os factores externos da factorização (3.33) da função matricial (3.27), então

$$A_0(\infty) = A_-(\infty)A_+(\infty),$$

ou

$$A_+^{-1}(\infty) = A_0^{-1}(\infty)A_-(\infty). \tag{3.48}$$

Tendo presente (3.40), temos

$$A(\infty) = \mathrm{diag}\,(A_-^{-1}(\infty), 1)B_1(\infty)\mathrm{diag}\,(A_+^{-1}(\infty), 1).$$

Com (3.48) podemos escrever

$$A(\infty) = \mathrm{diag}\,(A_-^{-1}(\infty), 1)B_1(\infty)\mathrm{diag}\,(A_0^{-1}(\infty), 1)\mathrm{diag}\,(A_-(\infty), 1).$$

A última igualdade significa que as matrizes $A(\infty)$ e $B_1(\infty)\mathrm{diag}\,(A_0^{-1}(\infty), 1)$ são semelhantes. Verificamos facilmente que a matriz

$$B_1(\infty)\mathrm{diag}\,(A_0^{-1}(\infty), 1) = \left.\begin{pmatrix} |a|^{-2}\,\overline{c}d & -|a|^{-2}\,d & 0 \\ \overline{d} + |a|^{-2}\,(\overline{c})^2 d & -|a|^{-2}\,\overline{c}d & |d|^2\,a^{-1} \\ -(\overline{a})^{-1}\overline{c} & (\overline{a})^{-1} & 0 \end{pmatrix}\right|_\infty,$$

é nilpotente; logo $A(\infty)$ também o é, os seus valores próprios são todos iguais a zero, e a asserção da Proposição é verdadeira. ■

Utilizando as Proposições 3.4 e 3.5, podemos escrever o resultado principal desta secção:

**Teorema 3.3** *Sejam* $a \in C(\mathring{\mathbb{R}})$ *uma função escalar que satisfaz a propriedade (3.25),* $k_a = \mathrm{ind}\, a$*,* $k$ *a dimensão do núcleo do operador (3.35),* $A$ *a* *função matricial definida por (3.40) e $l(A)$ o número definido por (2.58) para a matriz $A$. Então é válida a estimativa*

$$n \leq l(A) + \max(k_a - k, 0) + \max(k_a + k, 0), \tag{3.49}$$

*onde $n$ é o número de soluções linearmente independentes do problema de contorno de Riemann generalizado com deslocamento (3.16).*

**Demonstração.** Em (3.38), em vez de $-2\varkappa_1^- - 2\varkappa_2^-$, considere-se a soma

$$\max(-\varkappa_1, 0) + \max(-\varkappa_2, 0),$$

ou, com (3.34),

$$\max(k_a - k, 0) + \max(k_a + k, 0).$$

Com (3.47) obtemos (3.49). ∎

*Observação.* Sobre o caso quando $a \equiv 0$. Temos o problema de contorno

$$\varphi_+ = b\varphi_-(\alpha) + c\overline{\varphi_-} + d\overline{\varphi_-(\alpha)}, \quad \varphi_-(\infty) = 0.$$

Considere-se a função de deslocamento

$$\alpha^{-1}(t) = t - h,$$

e o problema

$$\varphi_+(\alpha^{-1}) = b(\alpha^{-1})\varphi_- + c(\alpha^{-1})\overline{\varphi_-(\alpha^{-1})} + d(\alpha^{-1})\overline{\varphi_-}.$$

Designemos

$$\begin{aligned} \psi_+ &= \varphi_+(\alpha^{-1}), \quad \psi_- = \varphi_-, \\ a_1 &= b(\alpha^{-1}), \quad c_1 = d(\alpha^{-1}), \quad d_1 = c(\alpha^{-1}). \end{aligned}$$

Obtemos o problema de contorno com o deslocamento $\alpha^{-1}$

$$\psi_+ = a_1\psi_- + c_1\overline{\psi_-} + d_1\overline{\psi_-(\alpha^{-1})}, \quad \psi_-(\infty) = 0,$$

que facilmente constatamos ser equivalente ao problema (3.16) com $b \equiv 0$. Logo o número de soluções linearmente independentes no caso de $a \equiv 0$ pode ser estimado analogamente ao caso de $b \equiv 0$.

*Exemplo.* Em $\widetilde{L}_2(\mathbb{R})$ vamos considerar o problema de contorno

$$\varphi_+ = \theta\varphi_- + \overline{\varphi_-} + \overline{\varphi_-(\alpha)}, \quad \varphi_-(\infty) = 0,$$

onde $\alpha(t) = t + 1$.

Este problema tem duas soluções linearmente independentes:

$$\begin{aligned} \varphi_+^{(1)}(t) &= 2(t+i)^{-1} + (\alpha+i)^{-1}, \quad \varphi_-^{(1)}(t) = (t-i)^{-1}, \\ \varphi_+^{(2)}(t) &= -i(\alpha+i)^{-1}, \quad \varphi_-^{(2)}(t) = i(t-i)^{-1}, \end{aligned}$$

e portanto $n = 2$.

A função matricial $A_0$ definida por (3.27) admite a seguinte factorização em $L_2^{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} -\theta^{-1} & 1 \\ -\theta^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-1} & 0 \\ 0 & \theta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

logo os índices parciais são $\varkappa_1 = \varkappa_2 = -1$, e portanto, $2 = n \leq l(A) + 2$.

Agora vamos calcular o número $l(A)$; a função matricial definida por (3.40) é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 + \theta\theta^{-1}(\alpha) & -1 & \theta\theta^{-1}(\alpha) \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Constatamos que todos os valores próprios da função $A$ são iguais a zero; logo $l(A) = 0$. Obtemos

$$2 = n \leq 2.$$

# Bibliografia


[1] Allen, R. and Mills, D.. *Signal Analysis.* IEEE, John Wiley & Sons, 2004.

[2] Baturev, A. A., Kravchenko, V. G. and Litvinchuk, G. S.. Approximate methods for singular integral equations with a non-Carleman shift. *Journal of Integral Equations and Applications*, vol. 8, n. 1, p. 1-17, 1996.

[3] Cohen, L.. *Time-Frequency Analysis.* Prentice-Hall, New Jersey, 1995.

[4] Clancey, K. and Gohberg, I.. *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators.* Operator Theory: Advances and Applications, vol. 3. Birkhauser Verlag, Basel, 1981.

[5] Conceição, A. C., Kravchenko, V. G., Teixeira F. S.. Factorization of matrix functions and the resolvents of certain operators. *Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 142, p. 91-100. Birkhauser Verlag, Basel, 2003.

[6] Conceição, A. C., Kravchenko, V. G., Teixeira F. S.. Factorization of some classes of matrix functions and the resolvent of a Hankel operator. *Factorization, Singular Operators and Related Problems*, p. 101-110. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[7] Drekova G. V. and Kravchenko, V. G.. Dimension and structure of the kernel and the cokernel of a singular integral operator with a linear fractional Carleman shift and conjugation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR, 315(2), 271-274, 1990 (in russian)*, Soviet Math. Dokl.,vol. 42(3), p. 743-746, 1991.

[8] Duduchava, R. B.. *Convolution integral equations with discontinuous presymbols, singular integral equations with fixed singularities and their applications to problems in mechanics.* Trudy Tbilisskogo Mat. Inst. Akad. Nauk Gruz. SSR, Tbilisi, 1979 (in russian).

[9] Ehrhart, T.. Invertibility theory for Toeplitz plus Hankel operators and singular integral operators with flip. *Journal of Functional Analysis*, vol. 208, p. 64-106, 2004.

[10] Gakhov, F. D.. *Boundary Value Problems.* Nauka, Moscow, 1977 (in russian).

[11] Gantmacher, F. R.. *The Theory of Matrices, vol. 1 and 2.* Chelsea Publishing Company, New York, 1977.

[12] Garnett, J. B.. *Bounded Analytic Functions.* Academic Press, New York, 1981.

[13] Gohberg, I. and Krupnik, N.. *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, vol. I and II.* Operator Theory: Advances and Applications, vol. 53 and 54. Birkhauser Verlag, Basel, 1992.

[14] Hahn, S.. *Hilbert Transforms in Signal Processing.* Artech House, 1996.

[15] Halmos, P. R.. *A Hilbert Space Problem Book*. Van Nostrand Company, Princeton, 1967.

[16] Henrici, P.. *Applied and Computational Complex Analysis, vol. 3.* John Wiley & Sons, 1993.

[17] Horn, R. A. and Johnson C. R.. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[18] Horn, R. A. and Johnson C. R.. *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[19] Karapetiants, N. and Samko, S.. *Equations with Involutive Operators.* Birkhauser, Boston, 2001.

[20] Kravchenko, V. G., Lebre, A. B. and Litvinchuk, G. S. Spectrum problems for singular integral operators with Carleman shift. *Math. Nachr.*, vol. 226, p. 129-151, 2001.

[21] Kravchenko, V. G., Lebre, A. B. and Rodriguez, J. S.. Factorization of singular integral operators with a Carleman shift and spectral problems. *Journal of Integral Equations and Applications*, vol. 13, n. 4, p. 339-383, 2001.

[22] Kravchenko, V. G., Lebre, A. B. and Rodriguez, J. S.. Factorization of singular integral operators with a Carleman shift via factorization of matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 142, p. 189-211. Birkhauser Verlag, Basel, 2003.

[23] Kravchenko, V. G., Lebre, A. B. and Rodriguez, J. S.. The kernel of singular integral operators with a finite group of linear-fractional shifts.

*To appear in the proceedings volume of the 20th Conference on Operator Theory, Timisoara, 2004.*

[24] Kravchenko, V. G., Lebre, A. B. and Rodriguez, J. S.. Factorization of singular integral operators with a Carleman shift via factorization of matrix functions: the anticommutative case. *Submitted for publication.*

[25] Kravchenko, V. G. and Litvinchuk, G. S.. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift.* Mathematics and its Applications, vol. 289. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[26] Kravchenko, V. G. and Marreiros, R. C.. An estimate for the dimension of the kernel of a singular operator with a non-Carleman shift. *Factorization, Singular Operators and Related Problems*, p. 197-204. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[27] Kravchenko, V. G. and Marreiros, R. C.. On the kernel of some one-dimensional singular integral operators with shift. *To appear in Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhauser Verlag, Basel.

[28] Kravchenko, V. G., Marreiros, R. C. and Rodriguez, J. S..On an estimate for the number of solutions of the generalized Riemann boundary value problem with shift. *To appear in Differential and Difference Equations and Applications*. Hindawi Publishing Corporation.

[29] Kravchenko, V. G. and Shaev, A. K.. The solvability theory of singular integral equations with a linear fractional Carleman shift. *Dokl. Akad. Nauk SSSR, 316(2), 288-292, 1991 (in russian)*, Soviet Math. Dokl.,vol. 43(1), p. 73-77, 1991.

[30] Krupnik, N.. *Banach Algebras with Symbol and Singular Integral Operators.* Operator Theory: Advances and Applications, vol. 26. Birkhauser Verlag, Basel, 1987.

[31] Lavrentiev, M. A. and Shabat, B. V.. *Methods of the Theory of the Complex Variable Functions.* Nauka, Moscow, 1987 (in russian).

[32] Lebre, A. B.. *Algebras de Operadores Integrais Singulares.* AEIST, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1996.

[33] Litvinchuk, G. S.. *Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift.* Nauka, Moscow, 1977 (in russian).

[34] Litvinchuk, G. S.. *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift.* Mathematics and its Applications, vol. 523. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[35] Litvinchuk, G. S. and Spitkovskii, I. M.. *Factorization of Measurable Matrix Functions.* Operator Theory: Advances and Applications, vol. 25. Birkhauser Verlag, Basel, 1987.

[36] Markushevich, A. I.. *Theory of Analytic Functions, vol. 1 and 2.* Nauka, Moscow, 1968 (in russian).

[37] Mazanko, I. e Chvetz, I.. *Princpios da Transformao e Deteco de Sinais pticos.* MFTI, Moscovo, 2001 (em russo).

[38] Muskhelishvili, N. I. *Singular Integral Equations.* Dover Publications, New York, 1992.

[39] Nikolski, N. K.. *Operators, Functions and Systems: An Easy Reading, Vol. I and II.* Math. Surv. and Mon., Vol. 92 and 93. American Mathematical Society, 2002.

[40] Prössdorf, S.. *Some Classes of Singular Equations.* North-Holland Publishing Company, 1978.

[41] Teixeira, F. S. e Lebre, A. B.. *Apontamentos de Anlise Funcional I.* AEIST, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1995.

[42] Vekua, I. N.. *Generalized Analytic Functions.* Nauka, Moscow, 1988 (in russian).

[43] Vekua, N. P.. *Systems of Singular Integral Equations.* Nauka, Moscow, 1970 (in russian).